8. Hypotézy porušenia materiálu

Učebný cieľ kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali ovládať:

- Princíp a význam hypotéz pevnosti.
- Základné hypotézy pevnosti, ich fyzikálne a matematické vyjadrenie.
- Praktické použitie hypotéz pevnosti pre danú napätosť a typ materiálu.

Väčšina údajov o pevnosti materiálov sa získala laboratórnymi skúškami namáhaním ťahom alebo tlakom. Prirodzene, že aj dimenzovanie súčiastky namáhanej prostým ťahom bude podľa toho úloha veľmi jednoduchá. Treba splniť len podmienku, aby najväčšie napätie neprekročilo hodnotu dovoleného namáhania σ_{dov}, ktoré pri väčšine húževnatých materiálov má pre ťah i tlak rovnaké hodnoty. Krehké materiály majú tieto hodnoty rozdielne.
Už v predošlých kapitolách bolo spomenuté, že dovolené namáhanie sa určuje tak, aby bola zaručená istá miera bezpečnosti oproti vzniku nebezpečného stavu (nebezpečným stavom rozumieme porušenie alebo veľkú trvalú deformáciu). Pri priamkovej napätosti (kde $\sigma_2 = 0$ a $\sigma_3 = 0$) možno všetky medzné podmienky pre posúdenie nebezpečenstva poruchy určiť z laboratórnych skúšok v ťahu alebo tlaku.
Pri rovinnej alebo priestorovej napätosti, kde ani jedno z hlavných napätí nie je rovné nule, môže byť začiatok nebezpečného stavu (t.j. stavu, kde dochádza k poruche alebo k veľkým trvalým deformáciám) spôsobený všeobecne rôznymi číselnými hodnotami σ_1, σ_2, σ_3. Každej kombinácii týchto napätí budú prislúchať určité nebezpečné hodnoty hlavných napätí, pri ktorých nastáva nebezpečný stav materiálu.

Na určenie týchto nebezpečných napätí σ_1, σ_2, σ_3 by bolo treba namáhať vzorky materiálov v laboratóriách pri rôznych vzájomných pomeroch hodnôt týchto napätí. Prakticky takéto pokusy uskutočniť ani nemožno vzhľadom na prevádzkové ťažkosti, ale najmä pre veľké množstvo skúšok.
Treba preto nájsť spôsob, ako zostaviť pri zloženej napätosti podmienky pevnosti podľa hodnôt medze klzu σ_{Kt} a medze pevnosti σ_{Pt} získaných zo skúšok pri priamkovej napätosti. Nebezpečný stav, či už pri húževnatých materiáloch (okamih vzniku veľkých trvalých deformácií) alebo pri krehkých materiáloch (okamih vzniku trhlín) pri rovinnej a priestorovej napätosti, budeme posudzovať pomocou tzv. *porovnávacieho napätia* σ_s, ktoré samotné by vyvolalo rovnaký nebezpečný stav ako skutočná rovinná alebo priestorová napätosť. Pri dimenzovaní sa spravidla kladie požiadavka, aby porovnávacie napätie bolo menšie ako dovolené namáhanie, teda

$$\sigma_s \leq \sigma_{dov}$$

Veľkosť porovnávacieho napätia je definovaná rôzne podľa jednotlivých hypotéz.

I. Hypotéza najväčšieho normálového napätia (Rankin, Clayperon)

Táto hypotéza predpokladá, že nebezpečný stav materiálu nastane vtedy, keď najväčšie normálové napätie danej napätosti dosiahne hodnotu normálového napätia priamkovej napätosti, pri ktorom nastáva *lom (krehkých materiálov)*, resp. *veľké trvalé deformácie (húževnatých materiálov)*.

Teda aj všeobecne, keď všetky tri hlavné napätia σ_1, σ_2, σ_3 sú rôzne od nuly, treba pri kontrole podľa tejto hypotézy rátať len s veľkosťou najväčšieho normálového napätia v ťahu alebo v tlaku, a ostatné napätia ako keby nemali vplyv na pevnosť materiálu. Porovnávacie napätie bude v tomto prípade rovné maximálnemu hlavnému napätiu

$$\sigma_s = \sigma_1 = \sigma_{\max} \quad \text{pri tlaku } \sigma_s = \sigma_3$$

a podmienka pevnosti podľa tejto hypotézy potom bude

$$\sigma_s = \sigma_1 \leq \sigma_{\max}$$

Táto hypotéza dáva vyhovujúce výsledky len pre krehké materiály.

II. Hypotéza najväčšieho pomerného predĺženia (Saint-Vénant)

Podľa tejto hypotézy dochádza k nebezpečnému stavu materiálu vtedy, keď pomerné predĺženie (resp. skrátenie) v ktoromkoľvek smere danej napätosti dosiahne hodnotu pomerného predĺženia priamkovej napätosti, pri ktorej nastáva porucha.
Nebezpečný stav nastáva teda pri pomernom predĺžení

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E}$$

Najväčšie pomerné predĺženie pri všeobecnej napätosti je dané rovnicou elasticity

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}\right)$$

Porovnaním posledných dvoch výrazov dostaneme:

$$\sigma_s = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}$$

Podmienka pevnosti podľa tejto hypotézy potom bude

$$\sigma_s = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} \leq \sigma_{dov}$$

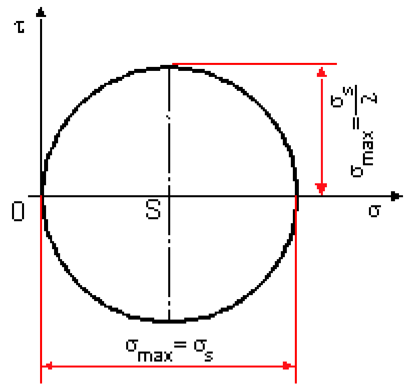
Vyhovujúce výsledky dáva táto hypotéza tiež len pre krehké materiály.

III. Hypotéza najväčšieho šmykového napätia (Guest-Coulomb)

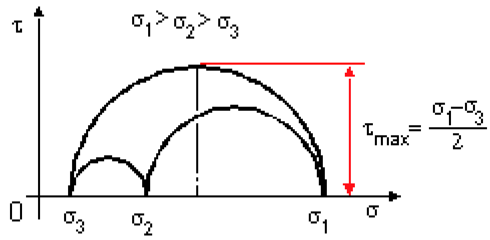
Podľa tejto hypotézy nastáva pri všeobecnej napätosti nebezpečný stav (porušenia) materiálu vtedy, keď najväčšie šmykové napätie danej napätosti dosahuje hodnotu šmykového napätia priamkovej napätosti, pri ktorej nastáva porucha.
Keď pripustíme pri prostom ťahu (obr.8.1) - Mohrova kružnica jednoosovej napätosti - pre normálové napätie hodnotu $\sigma_{\max} = \sigma_s$, potom najväčšie šmykové napätie bude

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_s}{2}$$

ktoré pôsobí v rezoch sklonených pod uhlom $45°$ k smeru ťahového napätia σ_s.



Obr.8.1 Jednoosová napätosť



Obr.8.2 Priestorová napätosť

Maximálne šmykové napätie priestorovej napätosti (obr.8.2) podľa Mohrových kružníc priestorovej napätosti bude

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Porovnaním posledných dvoch výrazov dostaneme:

$$\sigma_s = \sigma_1 - \sigma_3 \quad \text{pre rovinnú napätosť } \sigma_s = \sigma_1 - \sigma_2$$

Podmienku pevnosti pre priestorovú napätosť dostaneme v tvare

$$\sigma_s = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{dov}$$

a pre rovinnú napätosť

$$\sigma_s = \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_{dov}$$

Táto hypotéza súhlasí dosť presne so skutočnosťou, najmä pri húževnatých materiáloch a pri prevládajúcom namáhaní šmykovými napätiami (strih/šmyk, krútenie). Potvrdená je skúškami všestranného tlaku. Neplatí pre krehké materiály.

IV. Hypotéza celkovej energie napätosti (Beltrami-Haigh)

Podľa tejto hypotézy nastáva porušenie materiálu nezávisle od zloženej napätosti vtedy, keď celková energia napätosti danej napätosti dosiahne, resp. prekročí hodnotu celkovej energie napätosti priamkovej napätosti, pri ktorej nastáva porušenie materiálu.

Keď pri prostom ťahu pripustíme hodnotu normálového napätia $\sigma_s \leq \sigma_{dov}$, bude energia napätosti tejto priamkovej napätosti daná výrazom

$$A_1 = \frac{\sigma_s^2}{2E}$$

Celková energia napätosti pri priestorovej napätosti je

$$A_1 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m}(\sigma_1.\sigma_2 + \sigma_2.\sigma_3 + \sigma_1.\sigma_3)\right]$$

Porovnaním obidvoch energií napätosti dostaneme:

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m}(\sigma_1.\sigma_2 + \sigma_2.\sigma_3 + \sigma_1.\sigma_3)}$$

Podmienka pevnosti pre priestorovú napätosť podľa tejto hypotézy je

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m}(\sigma_1.\sigma_2 + \sigma_2.\sigma_3 + \sigma_1.\sigma_3)} \le \sigma_{dov}$$

a pre rovinnú napätosť, kde $\sigma_3 = 0$, bude

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \frac{2}{m}\sigma_1.\sigma_2} \le \sigma_{dov}$$

Táto hypotéza súhlasí so skutočnosťou pri húževnatých materiáloch pri napätosti, ktorá spôsobuje zväčšenie objemu.

V. Hypotéza energie napätosti pre zmenu tvaru (energie napätosti šmykových napätí - Huber-Misses-Hencky (H-M-H))

Podľa tejto hypotézy nastáva porušenie materiálov nezávisle od zloženej napätosti vtedy, keď energia napätosti pre zmenu tvaru danej napätosti prekročí hodnotu energie napätosti pre zmenu tvaru priamkovej napätosti, pri ktorej nastáva porucha.

Keď je priestorová napätosť daná napätiami σ_1, σ_2, σ_3, potom merná energia napätosti pre zmenu tvaru

$$A_t = \frac{m+1}{3mE}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1.\sigma_2 + \sigma_2.\sigma_3 + \sigma_1.\sigma_3)\right]$$

Mernú energiu napätosti pre zmenu tvaru pri jednoosovej napätosti dostaneme tak keď do nej dosadíme $\sigma_1 = \sigma_s, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0$. Potom bude

$$A_t = \frac{m+1}{3mE}\sigma_s^2$$

Porovnaním týchto vzťahov s úpravou, podobne ako v predchádzajúcej hypotéze, podmienka pevnosti potom bude

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1.\sigma_2 + \sigma_2.\sigma_3 + \sigma_1.\sigma_3)} \le \sigma_{dov}$$

a pre rovinnú napätosť danú napätiami σ_1, σ_2, $\sigma_3 = 0$ bude

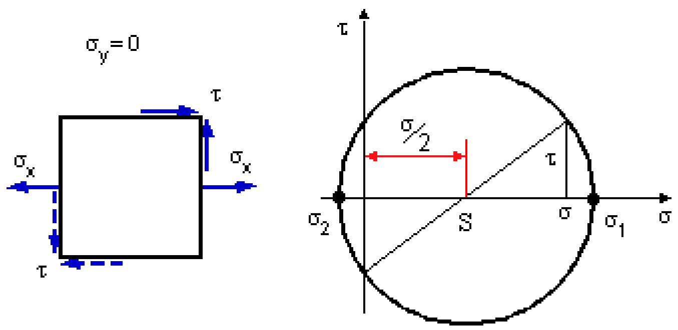
$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1.\sigma_2} \le \sigma_{dov}$$

Skúšky ukázali, že táto hypotéza dáva najpresnejšie hodnoty pre húževnaté materiály okrem všestranného ťahu, keby podľa tejto hypotézy materiál zniesol nekonečne veľký všestranný ťah ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$, t.j.: $\sigma_s = 0$).

Poznámka: Všetky pevnostné hypotézy sú vyjadrené pomocou hlavných napätí a tak pre jednotlivé prípady namáhania bude vždy potrebné najprv určiť hlavné napätia pre danú napätosť a potom ich dosadiť do príslušnej hypotézy.

Príklad 1

Veľmi častý je prípad rovinnej napätosti danej napätiami σ a τ (obr.8.3). Určíme pre takýto prípad podmienky pevnosti podľa jednotlivých pevnostných hypotéz.



Obr.8.3 Rovinná napätosť

Hlavné napätia pomocou Mohrovej kružnice (obr.8.3b) budú definované vzťahmi:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

a potom podľa jednotlivých pevnostných hypotéz bude

I. Hypotéza najväčšieho normálového napätia

Dosadením za hlavné napätie σ_1 hore uvedený výraz, a po úprave dostaneme podmienku pevnosti v tvare

$$\sigma_s = 0{,}5.\sigma + 0{,}5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{dov}$$

II. Hypotéza najväčšieho pomerného predĺženia

Dosadením za hlavné napätia σ_1, σ_2 hore uvedené vzťahy, podmienka pevnosti podľa tejto hypotézy po úprave bude

$$\sigma_s = 0{,}35\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{dov}$$

III. Hypotéza najväčšieho šmykového napätia

Dosadením za σ_1, σ_2, po úprave dostaneme:

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{dov}$$

IV. Hypotéza celkovej energie napätosti

Dosadením za σ_1, σ_2 a za *m* = 10/3 dostaneme:

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma^2 + 2{,}6\tau^2} \leq \sigma_{dov}$$

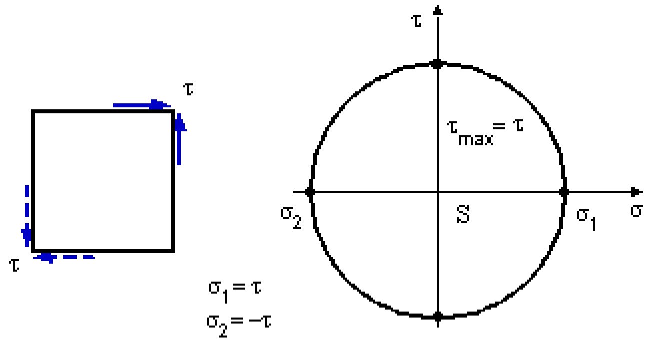
V. Hypotéza energie napätosti pre zmenu tvaru (H-M-H)

Dosadením za hlavné napätia do tejto hypotézy, podmienka pevnosti bude mať tvar:

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{dov}$$

Príklad 2

Keď je daná rovinná napätosť len samotnými šmykovými napätiami (obr.8.4a), potom, ako to vidieť aj z Mohrovej kružnice napätí (obr.8.4b), hlavné napätia budú:



Obr.8.4 Čistý šmyk

$$\sigma_1 = \tau$$
$$\sigma_2 = -\tau$$

a potom podľa jednotlivých hypotéz bude

I. Hypotéza najväčšieho normálového napätia

Keď dosadíme za $\sigma_1 = \tau$ a $\sigma_2 = -\tau$, dostaneme:

$$\sigma_s = \tau \le \sigma_{dov}$$

a z toho

$$\tau_{dov} = \sigma_{dov}$$

II. Hypotéza najväčšieho pomerného predĺženia

Keď do tejto hypotézy dosadíme za $\sigma_1 = \tau$ a $\sigma_2 = -\tau$, po úprave bude

$$\sigma_s = 1{,}3\tau \le \sigma_{dov}$$

a z toho

$$\tau_{dov} = 0{,}77\sigma_{dov}$$

III. Hypotéza najväčšieho šmykového napätia

Keď do tejto hypotézy dosadíme $\sigma_1 = \tau$ a $\sigma_2 = -\tau$, dostaneme:

$$\tau_{dov} = 0{,}5\sigma_{dov}$$

IV. Hypotéza celkovej energie napätosti

Keď do tejto hypotézy dosadíme $\sigma_1 = \tau$ a $\sigma_2 = -\tau$ a m = 10/3, po úprave dostaneme:

$$\sigma_s = 1{,}61.\tau \le \sigma_{dov}$$

a z toho

$$\tau_{dov} = 0{,}52\sigma_{dov}$$

V. Hypotéza energie napätosti pre zmenu tvaru (H-M-H)

Keď do tejto hypotézy dosadíme $\sigma_1 = \tau$ a $\sigma_2 = -\tau$, dostaneme:

$$\sigma_s = 1{,}73.\tau \le \sigma_{dov}$$

a z toho

$$\tau_{dov} = 0{,}577\sigma_{dov}$$

Ako vidieť, podľa jednotlivých pevnostných hypotéz dostávame rozdielne hodnoty dovoleného namáhania v šmyku v závislosti od dovoleného namáhania v ťahu. Vyhovujúce a najviac sa približujúce skutočnosti dávajú výsledky získané zo IV., resp. V. hypotézy, to znamená, že dovolené namáhanie v šmyku je asi 60% dovoleného namáhania v ťahu, t.j.

$$\tau_{dov} \doteq 0{,}6\sigma_{dov}$$