

6. Napätosť v bode telesa

Učebný cieľ kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali ovládať:

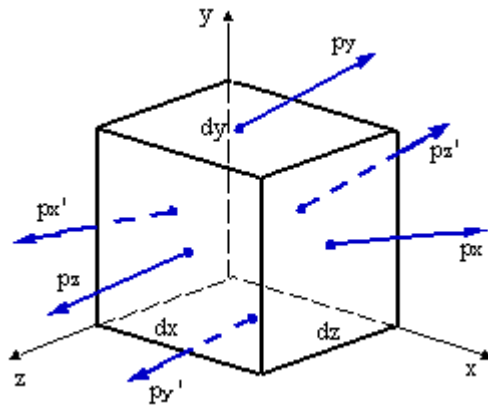
- Definícia napätosti v bode telesa.
- Druhy napätosti v bode telesa.
- Odvodenie vzťahov pre normálové a šmykové napätie v ľubovoľnej rovine prechádzajúcej daným bodom pri jednoosovej napätosti.
- Čo sú to hlavné normálové a hlavné šmykové napätia.
- Čo sú to hlavné roviny napätosti.
- Uviest' príklady jednoosovej napätosti.
- Ako je definovaná rovinná a priestorová napätosť.
- Uviest' príklady rovinatej a priestorovej napätosti.
- Ako je definované pretvorenie v bode telesa.
- Čo sú to hlavné pomerné predĺženia.
- Ako je definovaný invariant pomerného predĺženia.

6.1 POJEM NAPÄTOSTI

Uvažujme hmotné kontinuum zaťažené vonkajšími silami. Zodpovedajúce hmotné body vo vnútri telesa pôsobia vzájomne na seba plošnými silami, ktoré nazývame vektorom napätia. Napätie p v ľubovoľnom bode telesa bude funkciou veľkosti plôšky, na ktorej pôsobí vektor napätia, jej orientácie vzhľadom na vzťažný súradnicový systém a od polohy uvažovaného hmotného bodu. Orientácia sledovanej plôšky "hmotného bodu" je daná voľbou rezovej roviny. Keďže daným bodom možno preložiť nekonečný počet rezových rovín, v danom bode máme nekonečný počet výsledníc vnútorných síl. *Napätosť v bode telesa* je mechanický stav, daný súhrnom napätí v jednotlivých rezových rovinách, ktoré možno daným bodom preložiť. Vzhľadom na tenzorové vlastnosti napätia je napätosť v bode dokonale určená, ak poznáme napätia, pôsobiace v rovinách elementárneho hranolčeka (fyz. model hmotného bodu). Napätosť vo všeobecnosti delíme na:

1. priestorovú (trojosovú),
2. rovinnú (dvojosovú),
3. priamkovú (jednoosovú).

Na určenie druhu napätosti v bode telesa, spôsobenom vonkajšími silami, uvažujme elementárny hranol dx, dy, dz (obr. 6.1). Účinok odstránených častí nahradíme vnútornými silami.

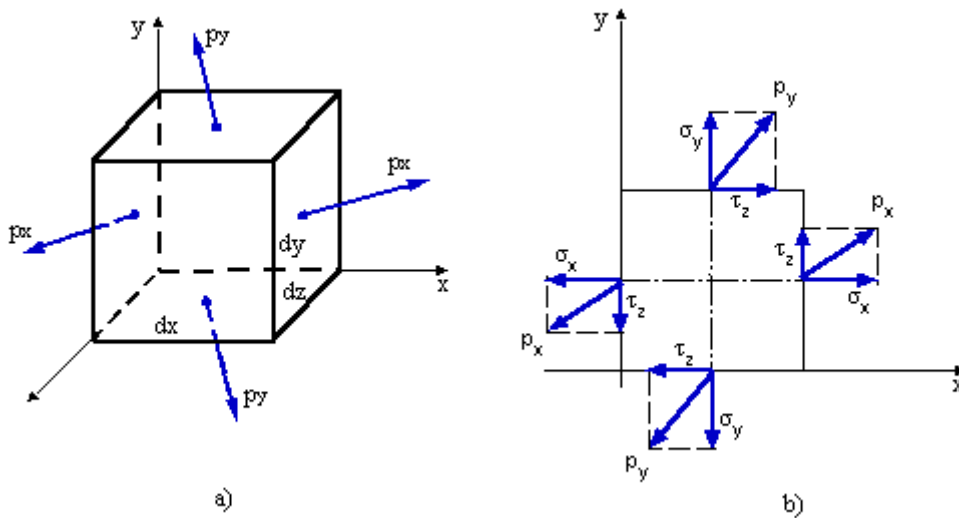


Obr.6.1 Napätosť v bode telesa

Napätie môže byť vo všeobecnosti rozložené po priereze nerovnomerne, no na stenách elementárneho hranola toto rozloženie môžeme pokladať za rovnomerné. Vnútorne sily pripadajúce na jednotku plochy, teda vektory napätia, prechádzajú ťažiskami príslušných plôch.

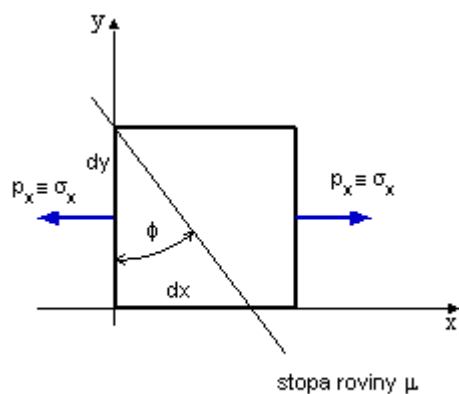
Z podmienok rovnováhy hranola je zrejmé, že $p_x = p'_x, p_y = p'_y, p_z = p'_z$.

Ak sú všetky napätia nenulové, ide o *priestorovú napätosť*. Ak nájdeme polohu elementárneho hranola v telese tak, že v dvoch protiľahlých stenách budú napätia (napr. p_z) rovné nule (obr. 6.2) a v ostatných stenách sú napätia nenulové, ide o *napätosť rovinnú*.

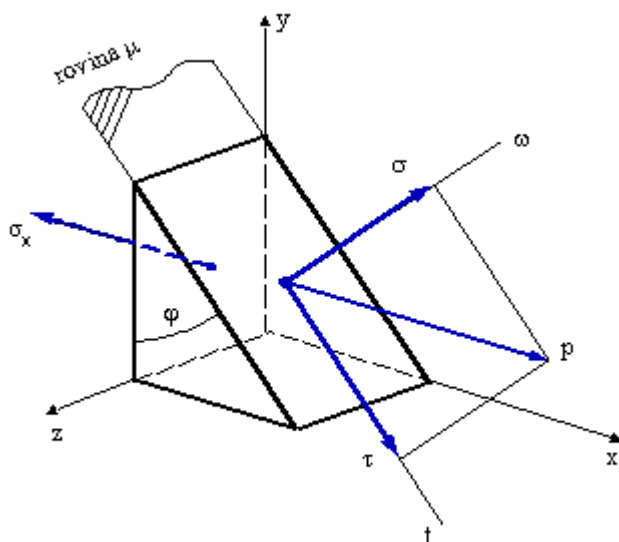


Obr.6.2 Rovinná napätosť

Ak môžeme dať elementárnemu hranolu v telese takú polohu, aby napr. p_y a p_z boli rovné nule (obr. 6.3), musí byť $p_x = \sigma_x$, potom hovoríme o *priamkovej napätosti*.



Obr.6.3 Jednoosová napätosť

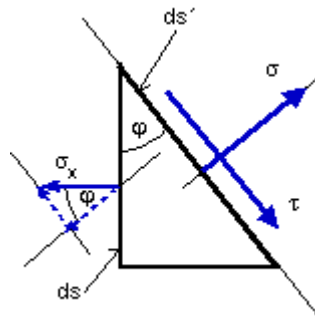


Obr.6.4 Určenie σ a τ v rovine μ

Z uvedeného vyplýva, že rovinná a priamková napätosť sú špeciálne prípady priestorovej napätosti. Ďalej si ukážeme, že ak poznáme napätia v rovinách elementárneho hranola, potom možno z nich určiť napätia v ľubovoľnej inej rovine, prechádzajúcej daným bodom.

6.2 PRIAMKOVÁ JEDNOOSOVÁ NAPÄTOSŤ

Úlohou bude z napätia σ_x určiť napätia v ľubovoľnej rovine μ , ktorá prechádza daným bodom. To nám potom umožní klasifikovať napätosť v danom bode a určiť roviny, v ktorých sú napätia extrémálne. Elementárny hranol rozrežeme rovinnou μ (obr.6.3 a 6.4). Z podmienok rovnováhy vnútorných síl elementu (obr.6.5) do smeru normálových a šmykových napätí dostaneme:



Obr.6.5 Rovnováha vnútorných síl

$$\sum F_x = 0: \sigma \cdot dS' - \sigma_x \cos \varphi \cdot dS = 0$$

$$\sum F_t = 0: \tau \cdot dS' - \sigma_x \sin \varphi \cdot dS = 0$$

Pretože $dS' = \frac{dS}{\cos \varphi}$, napätia v rovine μ budú: $\sigma = \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi$ a $\tau = \sigma_x \cdot \sin \varphi \cos \varphi$
 Ak použijeme vzťahy:

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2}$$

$$\sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}$$

potom

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cdot \cos 2\varphi$$

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2} \cdot \sin 2\varphi$$

Keďže v týchto rovniciach nevystupuje plocha dS a ani žiadna materiálová konštanta, napätie σ a τ závisí len od σ_x a uhla φ . Hľadáním extrému pre napätie σ zistíme, že normálové napätie je najväčšie v rovine kolmej na σ_x ($\varphi = 0$):

$$[\sigma]_{\varphi=0} = \sigma_{\max} = \sigma_x$$

a minimálne v rovine na ňu kolmej ($\varphi = 90^\circ$):

$$[\sigma]_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \sigma_{\min} = 0$$

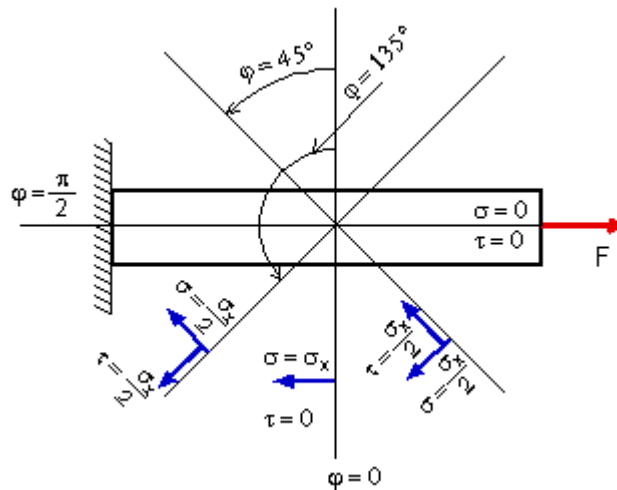
V týchto rovinách je šmykové napätie rovné 0. Naproti tomu šmykové napätie je maximálne v rovinách určených uhlami $\varphi = 45^\circ$, resp. $\varphi = 135^\circ$

$$[\tau]_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = \tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2}$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{4}$$

pričom normálové napätie tam nie je nulové. Znázornenie priamkovej napätosti pri čistom ťahu (tlaku) je znázornené na obr. 6.6. Z veľkosti napätia v jednotlivých rovinách je zrejmá voľba rezovej roviny (kolmá na osovú silu) pri namáhaní osovými silami. V tejto rovine je napätie maximálne, a keď nemá nastať porušenie tyče, potom

$$\sigma_{\max} = \sigma_x \leq \sigma_{\text{dov}}$$



Obr.6.6 Napätie σ a τ vo vybratých rovinách

6.3 MOHROVA KRUŽNICA JEDNOOSOVEJ NAPÄTOSTI

Priebeh napätia σ a τ v rezových rovinách v závislosti od uhla φ možno znázorniť graficky, keď rovnice prepíšeme na tvar

$$\sigma - \frac{\sigma_x}{2} = \frac{\sigma_x}{2} \cdot \cos 2\varphi$$

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2} \cdot \sin 2\varphi$$

Po umocnení a sčítaní týchto rovníc dostaneme:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2$$

Ak vo zvolenom súradnicovom systéme vynášame na os x napätia σ a na os y napätia τ , potom výsledná rovnica je rovnicou kružnice

$$(x - m)^2 + y^2 = R$$

ktorej stred leží na osi σ vo vzdialenosti $m = \frac{\sigma_x}{2}$ od počiatku súradnicového systému, má

polomer $R = \frac{\sigma_x}{2}$. Túto kružnicu nazývame Mohrovou kružnicou napätia (obr. 6.7). Medzi elementárnym hranolčekom a Mohrovou kružnicou platí táto závislosť:

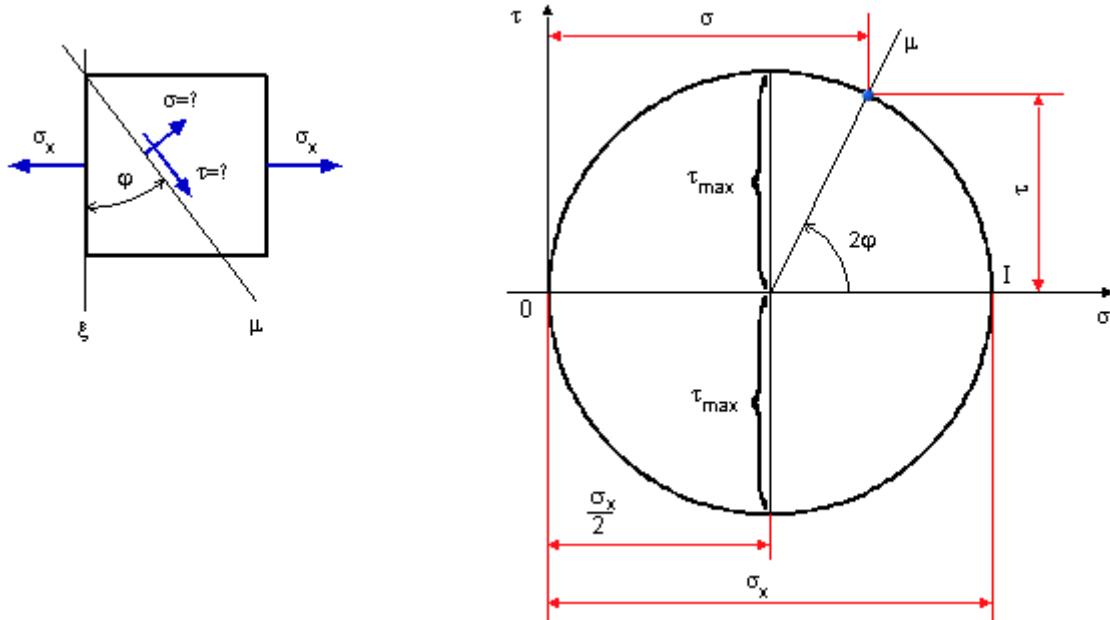
Každej rezovej rovine elementárneho hranola zodpovedá na Mohrovej kružnici jednojednoznačne jeden bod, ktorého súradnice sú hodnotami napätia σ a τ v príslušnej rovine.

Postup grafického riešenia napätia σ a τ v ľubovoľnej rovine μ je takýto:

1. Pre dané σ_x zostrojíme Mohrovu kružnicu (obr. 6.7).
2. Od bodu na kružnici, ktorý zodpovedá rezu ξ v elementárnom hranole, nanesieme stredový uhol 2φ v rovnakom zmysle, ako v elementárnom hranole (vždy od ξ ku μ).

3. Sprievodič stredového uhla 2φ vytína na Mohrovej kružnici bod μ , ktorého súradnice určujú v príslušnej mierke veľkosť napätí σ a τ_0

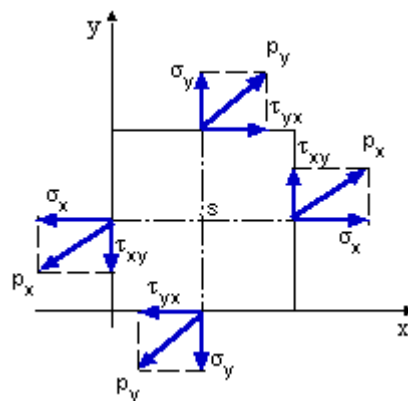
Mohrova kružnica čistého ťahu (obr. 6.6) je znázornená na obr. 6.7.



Obr.6.7 Mohrova kružnica jednoosovej napätosti

6.4 ROVINNÁ (DVOJOSOVÁ) NAPÄTOSŤ

Uvažujme rovinnú napätosť zadanú napätiami p_x a p_y ($p_z=0$) podľa obr.6.8.



Obr.6.8 Rovinná napätosť

Tieto napätia rozložíme do smerov súradnicových osí. Dostaneme tak normálové napätia σ_x a σ_y a šmykové napätia τ_{xy} , τ_{yx} . Prvý index šmykového napätia, napr. τ_{xy} , značí, že pôsobí na ploške kolmej na os x . Druhý index označuje smer pôsobenia napätia. Z momentovej podmienky rovnováhy vnútorných síl k bodu s dostaneme:

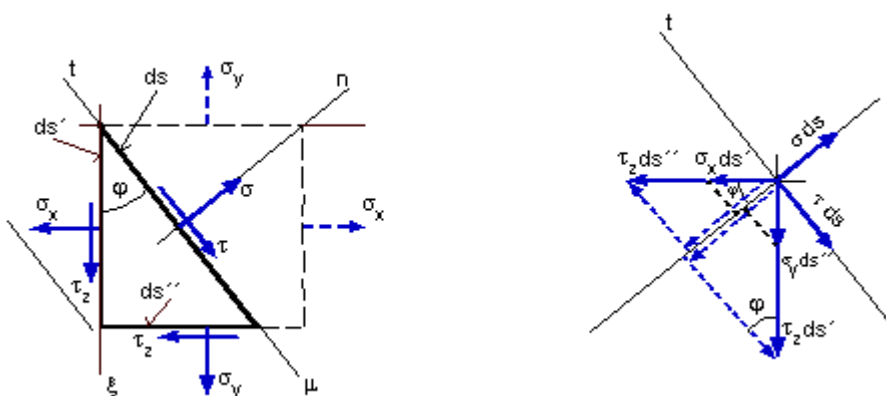
$$\sum M_s = 0: \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} - \tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} - \tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} = 0$$

a po úprave

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_x$$

Pretože elementárny hranol je vlastne bodom telesa, možno všeobecne povedať, že v určitom bode telesa sú v rezoch vzájomne kolmých šmykové napätia rovnaké a smerujú buď k priesečnici, alebo od nej a nazývame ich *združenými šmykovými napätiami*. Označujeme ich potom podľa toho, ku ktorej osi (priesečnici) smerujú. V našom prípade to je os z . Podobne to platí aj pre šmykové napätia v ostatných rovinách elementárneho hranola, napr. $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_y$ a pod.

Napätia v myslenom reze μ určíme z podmienok rovnováhy odrezanej časti hranola (obr. 6.9):



Obr.6.9 Určenie σ a τ

$$\sum F_x = 0: \quad \sigma \cdot dS - (\tau_x \cdot dS'' + \sigma_x \cdot dS') \cdot \cos \varphi - (\tau_x \cdot dS' + \sigma_y \cdot dS'') \cdot \sin \varphi = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad \sigma \cdot dS - (\sigma_y \cdot dS'' + \tau_x \cdot dS') \cdot \sin \varphi - (\sigma_x \cdot dS' + \tau_x \cdot dS'') \cdot \cos \varphi = 0$$

Ako však vidieť z obr. 6.9, platí: $dS' = dS \cdot \cos \varphi$ a $dS'' = dS \cdot \sin \varphi$

Dosadením týchto vzťahov do predchádzajúcich rovníc dostaneme:

$$\sigma = \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi + \sigma_y \cdot \sin^2 \varphi + 2\tau_x \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

$$\tau = \sigma_x \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \sigma_y \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \tau_x \cdot \sin^2 \varphi - \tau_x \cdot \cos^2 \varphi$$

Tieto rovnice možno ďalej upraviť použitím vzťahov:

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

$$2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \sin 2\varphi$$

a ďalšej úprave do tvaru

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi + \tau_x \cdot \sin 2\varphi$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi - \tau_x \cdot \cos 2\varphi$$

Z poslednej rovnice vidieť, že napätia σ a τ v reze μ , ktorý je odklonený od rezu ξ o uhol φ , sú nezávislé od dS a materiálových konštánt. Podobne ako pri priamkovej napätosti možno

určiť rezy I. a II., v ktorých normálové napätie nadobúda extrémne hodnoty. Hľadáním extrému funkcie $\sigma = \sigma(\varphi)$ nájdeme maximálne (σ_1) a minimálne (σ_2) normálové napätie v tvare

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2}$$

Roviny I. a II. nazývame *hlavnými rovinami* a napätia σ_1 a σ_2 v nich pôsobiace *hlavnými napätiami*. Ďalej by sme zistili, že v hlavných rovinách sú šmykové napätia nulové a hlavné roviny napätosti sú navzájom kolmé.

Podobným postupom pre maximálne šmykové napätia dostaneme:

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2}$$

Extrémne šmykové napätia, pôsobiace v dvoch vzájomne na seba kolmých rovinách, sa od seba líšia len znamienkami (čo znovu len potvrdzuje zákon združených šmykových napätí). V rezoch, kde pôsobia extrémne šmykové napätia, súčasne pôsobia i normálové napätia. Ak urobíme súčet hlavných napätí definovaných rovnicou pre maximálne a minimálne normálové napätie, dostaneme:

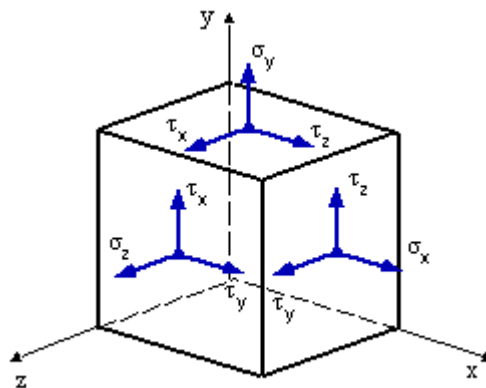
$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = \text{const}$$

To znamená, že súčet normálových napätí v dvoch ľubovoľných na seba kolmých rovinách v tom istom bode telesa je konštantný a je rovný súčtu hlavných napätí. Tento súčet je invariantný voči voľbe vzťahného súradnicového systému v danom bode.

Preto túto rovnicu nazývame 1. invariantom napätí. Pre rovinnú napätosť možno obdobným spôsobom ako pri jednoosovej napätosti zostrojiť Mohrovú kružnicu. Táto kružnica je grafickým znázornením rovinatej napätosti v bode telesa.

6.5 PRIESTOROVÁ NAPÄTOSŤ

Vo všetkých troch rovinách EH pôsobia nenulové napätia. Priestorová napätosť je zadaná tromi normálovými napätiami σ_x , σ_y , σ_z a tromi združenými šmykovými napätiami τ_x , τ_y a τ_z (obr. 6.10), z ktorých možno určiť vektor napätia v ľubovoľnej rovine EH.



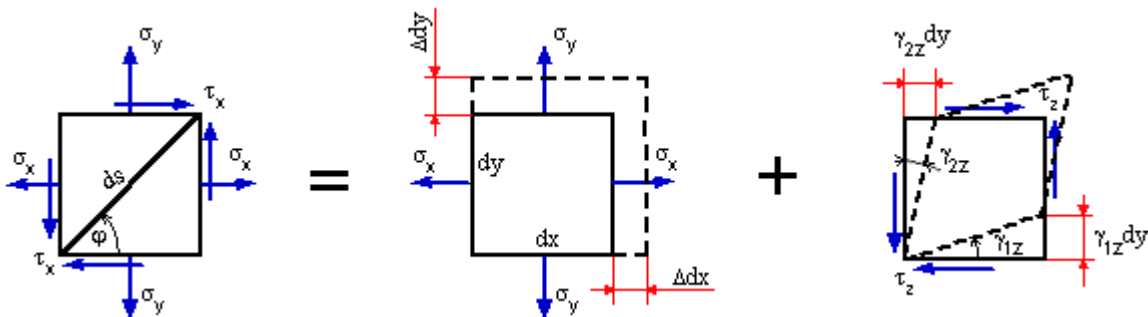
Obr.6.10 Priestorová napätosť

Zo zložiek tenzora napätia možno určiť tri hlavné normálové napätia (ako hlavné hodnoty tenzora napätia) σ_1 , σ_2 , σ_3 , ktoré pôsobia v troch navzájom na seba kolmých - hlavných rovinách I, II, III.

Pomerne zložitým postupom možno zostrojiť aj MK. Podrobnejšiu analýzu priestorovej napätosti však neuvádzame a pri potrebe riešiť takúto napätosť odporúčame použiť literatúru uvedenú v závere skripta. Treba však uviesť, že rovinná a priamková napätosť sú špeciálne prípady priestorovej napätosti.

6.6 PRETVORENIE V BODE TELESA

Analýzou pretvorenia telesa nazývame skúmanie zmeny vzdialenosti dvoch vybraných hmotných bodov telesa. Pretvorením v bode telesa budeme rozumieť deformáciu elementárneho hranolčeka. Ak elementárny hranol (obr. 6.11) je zaťažovaný rovinnou napätosťou, môžeme na základe zákona superpozície účinkov jeho deformáciu rozdeliť na pretvorenia od normálových napätí σ_x , σ_y a zmenu pravého uhla EH od šmykových napätí τ_x .



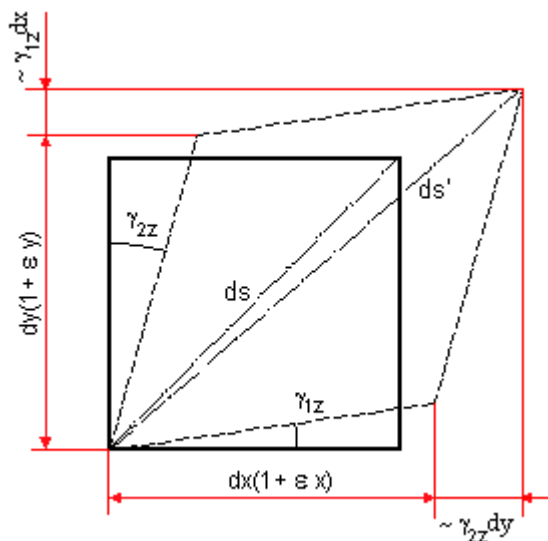
Obr.6.11 Rovinná deformácia

Predĺženie strán hranola od normálových napätí bude

$$\Delta dx = \varepsilon_x dx$$

$$\Delta dy = \varepsilon_y dy$$

Výsledné pretvorenia EH je na obr. 6.12.



Obr.6.12 Zložky pretvorenia

Uhlopriečka EH - ds sa zmení na ds'

$$ds' = ds + \Delta ds = (1 + \varepsilon) ds$$

resp. podľa obr. 6.12

$$ds' = \sqrt{\left[(1 + \varepsilon_x) dx + \gamma_{1x} dy \right]^2 + \left[(1 + \varepsilon_y) dy + \gamma_{2x} dx \right]^2}$$

Ak potom celú rovnicu umocníme a vykrátíme ds a podľa obr. 6.11 dosadíme za

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \varphi$$

dostaneme

$$(1 + \varepsilon)^2 = \left[(1 + \varepsilon_x) dx + \gamma_{1x} \sin \varphi \right]^2 + \left[(1 + \varepsilon_y) dy + \gamma_{2x} \cos \varphi \right]^2$$

Vykonaním vyznačených operácií a prijatím predpokladov, že pomerné predĺženie ε , ε_x , ε_y a uhlové pretvorenia γ_{1x} , γ_{2x} sú oproti jednotke veľmi malé, možno ich štvorce a súčiny ako veličiny malé, vyšších rádov, zanedbať a tak po úprave bude

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_y \sin^2 \varphi + (\gamma_{1x} + \gamma_{2x}) \sin \varphi \cos \varphi$$

Ak ešte označíme celkovú zmenu pravého uhla $\gamma = \gamma_{1x} + \gamma_{2x}$ a použijeme tiež vzťahy

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\varphi + \frac{\gamma}{2} \sin 2\varphi$$

dostaneme po úprave vzťah pre pomerné predĺženie uhlopriečky

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\varphi + \frac{\gamma}{2} \sin 2\varphi$$

Tento výraz je analogický s prvou rovnicou na určenie σ z daných σ_x , σ_y a τ_x v rovinatej napätosti. V oboch rovnicach si navzájom zodpovedajú:

$$\sigma \sim \varepsilon \quad \tau \sim \frac{\gamma}{2}$$

$$\sigma_x \sim \varepsilon_x \quad \tau_x \sim \frac{\gamma_x}{2}$$

$$\sigma_y \sim \varepsilon_y$$

Použitím tejto analógie možno potom použiť všetky výsledné vzorce pre rovinnú napätosť, ak príslušné napätia nahradíme pomerným predĺžením a uhlovým pretvorením. Pre hlavné pomerné predĺženia a uhlové pretvorenia budú platiť vzťahy:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\gamma_x}{2} \right)^2}$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\varphi - \frac{\gamma_x}{2} \cos 2\varphi$$

Podobne bude platiť invariant pomerných predĺžení

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \text{const}$$

ako aj fakt, že možno nakresliť Mohrovu kružnicu deformácie v bode telesa.

Keďže vo všetkých tu odvodených vzťahoch sa nevyskytuje žiadna materiálová konštanta, platia tieto rovnice pre všetky materiály, a to pre deformácie elastické i plastické, a to tým presnejšie, čím sú deformácie menšie.