

Mechanika, termodynamika a hydromechanika
Návody na cvičenia
(Vybrané kapitoly)

Vladimír Kutiš, Justín Murín

Obsah

Úvod	vii
I Mechanika	1
1 Posuvný a otáčavý účinok silových sústav	3
1.1 Základné pojmy	3
1.2 Riešené príklady	3
1.3 Neriešené príklady	7
2 Ekvivalentná transformácia silových sústav	9
2.1 Základné pojmy	9
2.2 Riešené príklady	11
2.3 Neriešené príklady	12
3 Väzby a väzbové reakcie	13
3.1 Základné pojmy	13
3.2 Riešené príklady	14
3.3 Neriešené príklady	18
4 Prútové sústavy	21
4.1 Predpoklady riešenia	21
4.2 Statická určitost' rovinných prútových sústav	21
4.3 Metódy riešenia	22
4.4 Riešené príklady	22
4.5 Neriešené príklady	27
5 Ťah - tlak	29
5.1 Pomerné predĺženie	29
5.2 Vnútorne napätie a dimenzovanie	29
5.3 Riešené príklady	30
5.4 Neriešené príklady	33
6 Ťah - tlak, staticky neurčité úlohy	35
6.1 Postup pri riešení staticky neurčitých úlohách	35
6.2 Riešené príklady	35
6.3 Neriešené príklady	38
7 Krútenie kruhových a medzikruhových prierezov	41
7.1 Základné vzťahy a dimenzovanie	41
7.2 Riešené príklady	42

7.3	Neriešené príklady	47
8	Rovinný ohyb priamych nosníkov	49
8.1	Ohybový moment a priečna sila	49
8.2	Normálové a šmykové napätia	49
8.3	Deformácia priamych nosníkov	51
8.4	Riešené príklady	52
8.5	Neriešené príklady	57
II	Termodynamika	59
9	Stavová rovnica ideálneho plynu a zmesi ideálnych plynov	61
9.1	Stavové veličiny plynu	61
9.1.1	Základné stavové veličiny	61
9.1.2	Energetické veličiny	61
9.1.3	Odvozené veličiny	62
9.2	Procesové veličiny	62
9.3	Stavová rovnica ideálneho plynu	62
9.4	Zmesi plynov	63
9.5	Riešené príklady	64
9.6	Neriešené príklady	66
10	Prvá veta termodynamická a základné zmeny stavu	67
10.1	Matematické vyjadrenie prvej vety termodynamickej	67
10.2	Základné zmeny stavu	68
10.3	Riešené príklady	69
10.4	Neriešené príklady	72
11	Termodynamika pár	73
11.1	Základné pojmy	73
11.2	Riešené príklady	73
11.3	Neriešené príklady	77
12	Clausius - Rankinov obch	79
12.1	Základné pojmy	79
12.2	Riešené príklady	79
12.3	Neriešené príklady	85
III	Hydromechanika	87
13	Hydrostatický tlak, jeho meranie a výpočet	89
13.1	Základné pojmy	89
13.2	Riešené príklady	90
13.3	Neriešené príklady	92
14	Rovnica kontinuity - dimenzovanie potrubí, Bernoulliho rovnica, hydraulické straty	93
14.1	Základné pojmy	93
14.2	Riešené príklady	95
14.3	Neriešené príklady	97

Úvod

Tieto skripta obsahujú riešené i neriešené príklady z vybraných oblastí mechaniky a termomechaniky s dôrazom na silnoprúdovú elektrotechniku a elektroenergetiku. Nadväzujú priamo na internetovú učebnicu Mechanika a termomechanika (kmech.elf.stuba.sk), kde sú spracované teoretické východiská týchto oblastí inžinierskej činnosti. Sú určené študentom bakalárskeho štúdia na FEI STU v odbore Elektroenergetika a silnoprúdové inžinierstvo, a Elektrotechnika.

V časti Mechanika je uvedené riešenie úloh statiky hmotného bodu a telesa vyúsťujúce do statickej analýzy prútových sústav. Na túto problematiku nadväzuje riešenie úloh pružnosti a pevnosti pri základných spôsoboch namáhania, ako je ťah-tlak, krútenie kruhových a medzi-kruhových prierezov, a ohybu nosníkov.

V časti Termodynamika sú uvedené riešenia základných úloh energetickej termodynamiky zameranej na premenu tepla na mechanickú prácu v elektrárňach. Je tu riešená tepelná bilancia obehu klasickej i jadrovej elektrárne s dôrazom na úpravy zvyšujúce ich tepelnú účinnosť.

V časti hydrostatika sú uvedené príklady zamerané na meranie tlaku v kvapalinách, na dimenzovanie hydraulických potrubí ako aj hydrodynamických pomerov v nich. Tiež sú uvedené príklady na výpočet hydraulických strát, čerpacej práce a výkonu čerpadiel v energetických systémoch a zariadeniach.

Čast' I

Mechanika

Kapitola 1

Posuvný a otáčavý účinok silových sústav

1.1 Základné pojmy

- Teleso - je objekt, ktorý podlieha nášmu skúmaniu z hľadiska pôsobenia okolitého prostredia naň.
- Sila - pod pojmom sila rozumieme pôsobenie okolitého prostredia na teleso. Toto pôsobenie môže byť priame - priamy kontakt medzi telesami alebo nepriame - pôsobenie poľa na teleso (magnetického, gravitačného, ...). Sila ako vektorová veličina v trojrozmernom priestore je definovaná

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (1.1)$$

Absolútna hodnota sily (veľkosť sily) je definovaná vzťahom

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \text{ [N]} \quad (1.2)$$

- Moment sily - vyjadruje schopnosť sily spôsobovať otáčanie telesa vzhľadom na zadaný bod. Je definovaný nasledovne

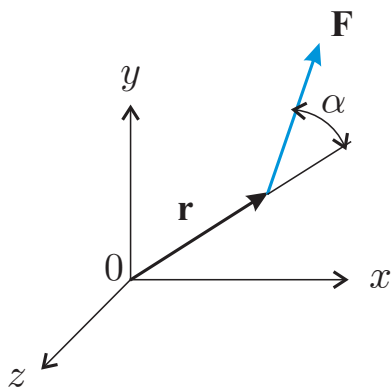
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \text{ [Nm]} \quad (1.3)$$

kde $\mathbf{r}$ definuje polohu pôsobiska $\mathbf{F}$ vzhľadom na zadaný bod.

- Posuvný účinok silovej sústavy - pod týmto pojmom rozumieme výslednicu všetkých síl, ktoré pôsobia na dané teleso alebo sústavu telies. Posuvný účinok silovej sústavy je rovnaký vzhľadom na všetky body telesa alebo sústavy telies.
- Otáčavý účinok silovej sústavy - pod týmto pojmom rozumieme výsledný moment silovej sústavy vzhľadom na zadaný bod. K rôznym bodom má daná silová sústava obecné rôzne otáčavé účinky.

1.2 Riešené príklady

Príklad 1 Určite posuvný a otáčavý účinok sily $\mathbf{F}$ k bodu 0 a uhol medzi $\mathbf{r}$ a $\mathbf{F}$ pomocou skalárneho súčinu. Dané je: $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ [m], $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ [N].



Obrázok 1.1: Príklad 1 - zadanie

Riešenie:

- Posuvný účinok.

Je daný absolútnou hodnotou sily definovanou vzt'ahom 1.2

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5 \text{ N}$$

- Otáčavý účinok.

Moment je definovaný vzt'ahom 1.3 a teda

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 6\mathbf{k} \text{ Nm}$$

Absolútna hodnota (veľkosť) momentu je 6 Nm.

- Uhol medzi $\mathbf{r}$ a $\mathbf{F}$.

Pre skalárny súčin vektorov $\mathbf{r}$ a $\mathbf{F}$ platí:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = r_x F_x + r_y F_y + r_z F_z$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = |\mathbf{r}| |\mathbf{F}| \cos \alpha$$

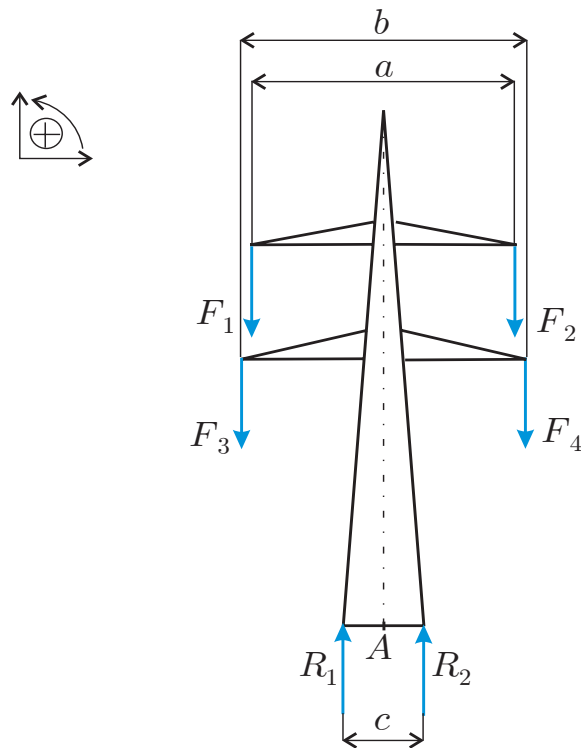
a teda

$$\cos \alpha = \frac{r_x F_x + r_y F_y + r_z F_z}{|\mathbf{r}| |\mathbf{F}|} = \frac{17}{5\sqrt{13}}$$

$$\alpha = \arccos \frac{17}{5\sqrt{13}} = 19,44^\circ$$

Príklad 2 Určite posuvný a otáčavý účinok silovej sústavy na stožiar podľa obrázka 1.2 k bodu A.

Riešenie:



Obrázok 1.2: Príklad 2 - zadanie

- Posuvný účinok k bodu A .

Na rozdiel od predchádzajúceho príkladu, v ďalších príkladoch budeme uvažovať skalárne zložky síl a momentov. Keďže všetky sily pôsobia iba v smere osi y , iba v tomto smere má zmysel uvažovať o posuvnom účinku tejto silovej sústavy:

smere y

$$V = -\sum_{i=1}^4 F_i + \sum_{i=1}^2 R_i$$

- Otáčavý účinok k bodu A .

$$M_A = F_1 a/2 - F_2 a/2 + F_3 b/2 - F_4 b/2 - R_1 c/2 + R_2 c/2$$

Príklad 3 Určite posuvný a otáčavý účinok silovej sústavy nosnej konštrukcie osvetľovacej rampy podľa obrázka 1.3 k bodu A .

Riešenie:

- Posuvný účinok k bodu A .

Keďže všetky sily ležia v jednej rovine, ide o rovinnú silovú sústavu. Jej posuvný účinok vyjadríme v dvoch smeroch:

- smer x

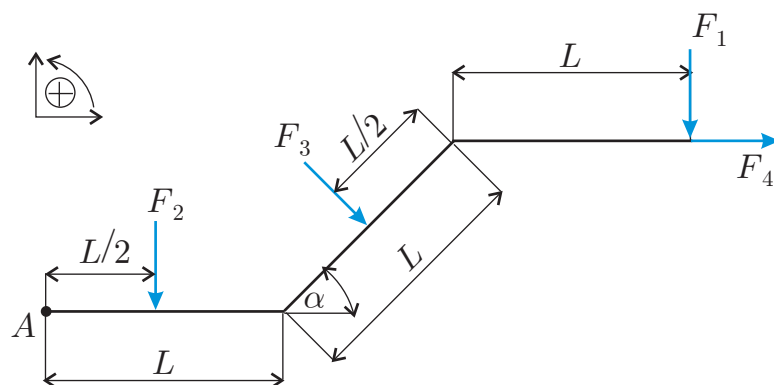
$$H = F_4 + F_3 \sin \alpha$$

- smer y

$$V = -F_2 - F_3 \cos \alpha - F_1$$

Výsledný posuvný účinok

$$R = \sqrt{H^2 + V^2}$$

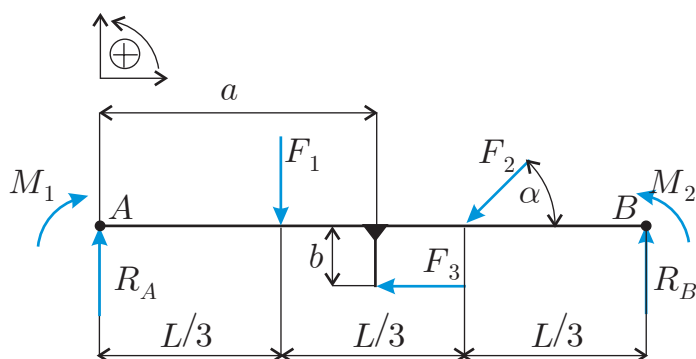


Obrázok 1.3: Príklad 3 - zadanie

- Otáčavý účinok k bodu A.

$$M_A = -F_2 l/2 - F_1 (2l + l \cos \alpha) - F_4 l \sin \alpha - F_3 \cos \alpha (l + l/2 \cos \alpha) - F_3 \sin \alpha (l/2 \sin \alpha)$$

Príklad 4 Určite posuvný a otáčavý účinok silovej sústavy pôsobiacej na nosník podľa obrázka 1.4 k bodom A a B.



Obrázok 1.4: Príklad 4 - zadanie

Riešenie:

- Posuvný účinok k bodu A a B:

- smer x

$$H_A = H_B = -F_3 - F_2 \cos \alpha$$

- smer y

$$V_A = V_B = R_A + R_B - F_1 - F_2 \sin \alpha$$

- Otáčavý účinok k bodu A.

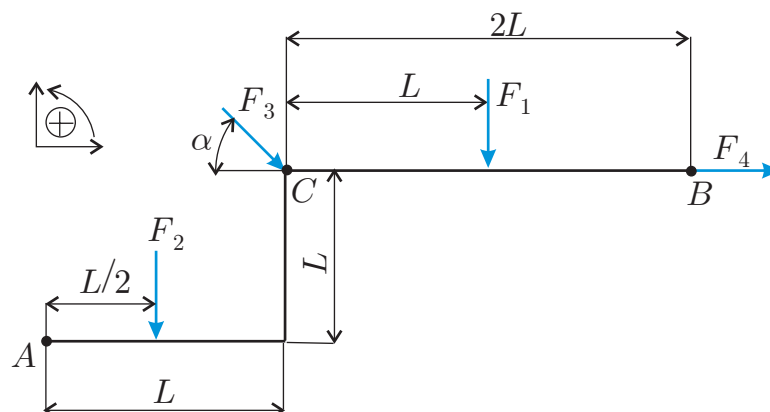
$$M_A = -M_1 + M_2 - F_1 L/3 - F_2 2L/3 \sin \alpha - F_3 b + R_B L$$

- Otáčavý účinok k bodu B.

$$M_B = -M_1 + M_2 + F_1 2L/3 + F_2 L/3 \sin \alpha L/3 - F_3 b - R_A L$$

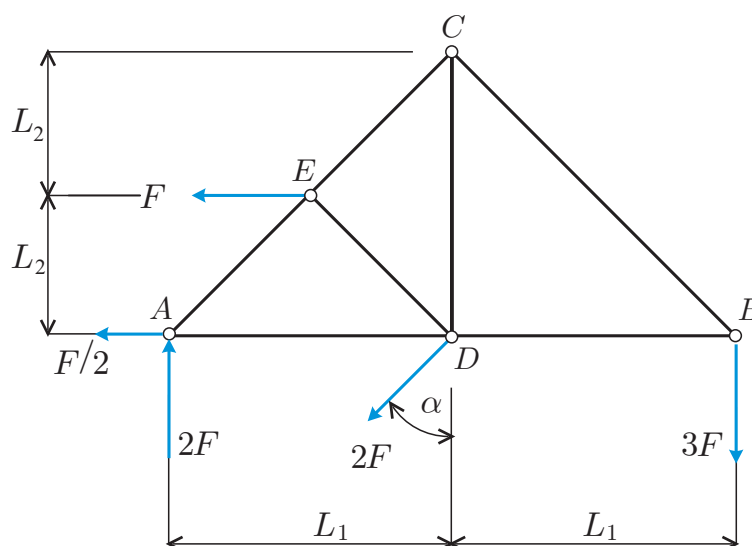
1.3 Neriešené príklady

Príklad 5 Určite posuvný a otáčavý účinok silovej sústavy zobrazenej na obrázku 1.5 k bodom A, B a C.



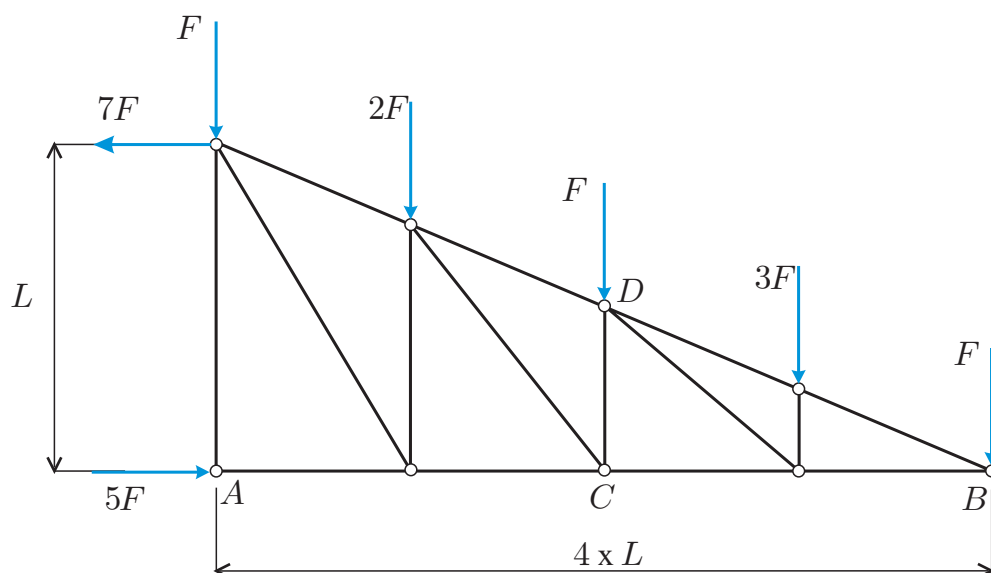
Obrázok 1.5: Príklad 5 - zadanie

Príklad 6 Určite posuvný a otáčavý účinok silovej sústavy zobrazenej na obrázku 1.6 k bodom A, B, C, D a E. Sila $F = 1500 \text{ N}$, uhol $\alpha = 45^\circ$, dĺžka $L_1 = 2 \text{ m}$ a $L_2 = 3 \text{ m}$.



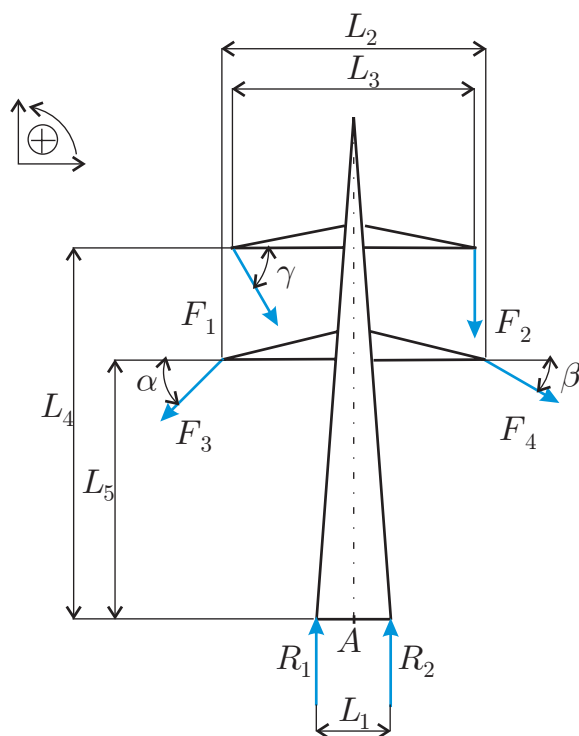
Obrázok 1.6: Príklad 6 - zadanie

Príklad 7 Určite posuvný a otáčavý účinok silovej sústavy zobrazenej na obrázku 1.7 k bodom A, B, C, a D. Sila $F = 1000 \text{ N}$ a dĺžka $L = 2 \text{ m}$.



Obrázok 1.7: Príklad 7 - zadanie

Príklad 8 Určite posuvný a otáčavý účinok silovej sústavy zobrazenej na obrázku 1.8 k bodu A. Sila $F_1 = 1000 \text{ N}$, $F_2 = 1500 \text{ N}$, $F_3 = 2000 \text{ N}$, $F_4 = 800 \text{ N}$, $R_1 = 2500 \text{ N}$ a $R_2 = 3000 \text{ N}$. Uhol $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$ a $\gamma = 60^\circ$. Dĺžka $L_1 = 1 \text{ m}$, $L_2 = 5 \text{ m}$, $L_3 = 4 \text{ m}$, $L_4 = 10 \text{ m}$ a $L_5 = 6 \text{ m}$.



Obrázok 1.8: Príklad 8 - zadanie

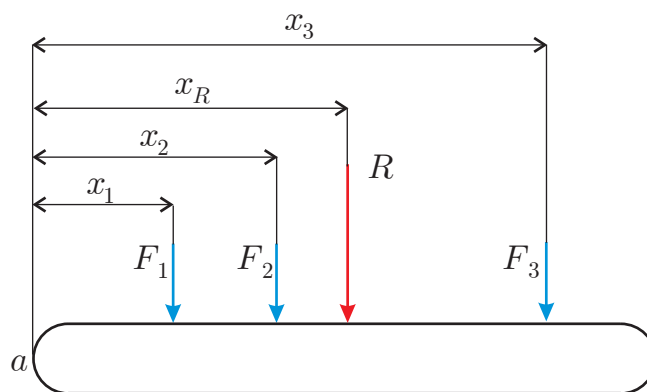
Kapitola 2

Ekvivalentná transformácia silových sústav

2.1 Základné pojmy

Pri určovaní posuvného a otáčavého účinku silovej sústavy na teleso je možné takúto silovú sústavu nahradit' novou silovou sústavou resp. jej výslednicou, ktorá bude mať výsledný posuvný aj otáčavý účinok rovnaký ako pôvodná sústava. Takéto sústavy potom nazývame ekvivalentné.

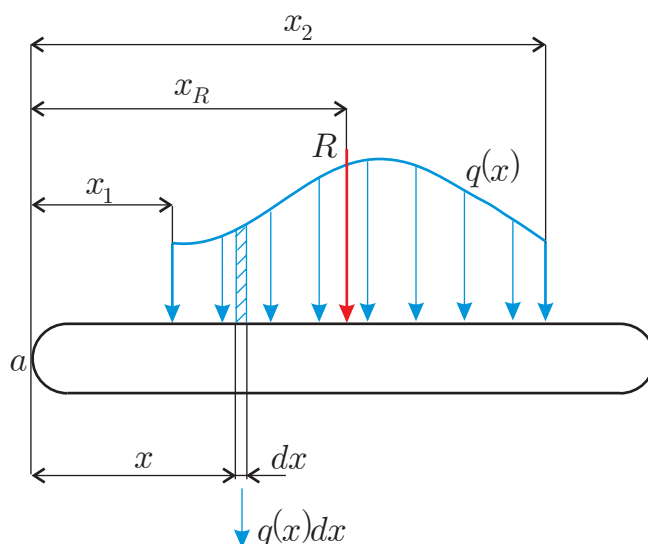
- Diskrétné sily.



Obrázok 2.1: Ekvivalentná silová sústava pri diskretnom zaťažení

	Pôvodná sústava	Nová sústava	
Posuvný účinok:	$V_a = -\sum_{i=1}^3 F_i$	$V_a = -R$	$\Rightarrow R = \sum_{i=1}^3 F_i$
Otáčavý účinok:	$M_a = -\sum_{i=1}^3 F_i x_i$	$M_a = -R x_R$	$\Rightarrow x_R = \frac{\sum_{i=1}^3 F_i x_i}{R} = \frac{\sum_{i=1}^3 F_i x_i}{\sum_{i=1}^3 F_i}$

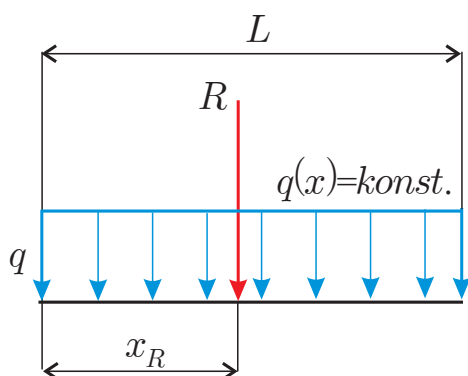
- Spojite rozložené sily.



Obrázok 2.2: Ekvivalentná silová sústava pri spojitom zaťažení

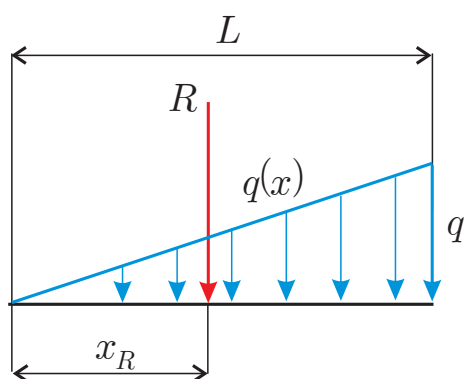
	Pôvodná sústava	Nová sústava	
Posuvný účinok:	$V_a = -\int_{x_1}^{x_2} q(x) dx$	$V_a = -R$	$\Rightarrow R = \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx$
Otáčavý účinok:	$M_a = -\int_{x_1}^{x_2} q(x)x dx$	$M_a = -Rx_R$	$\Rightarrow x_R = \frac{\int_{x_1}^{x_2} q(x)x dx}{R} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} q(x)x dx}{\int_{x_1}^{x_2} q(x) dx}$

Pre konštantné a lineárne premenlivé spojité zaťaženie dostaneme vzt'ahy:



$$R = qL$$

$$x_R = \frac{L}{2}$$

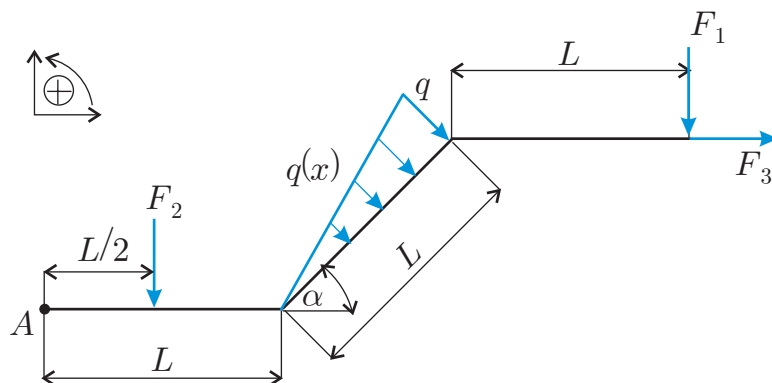


$$R = \frac{1}{2}qL$$

$$x_R = \frac{2}{3}L$$

2.2 Riešené príklady

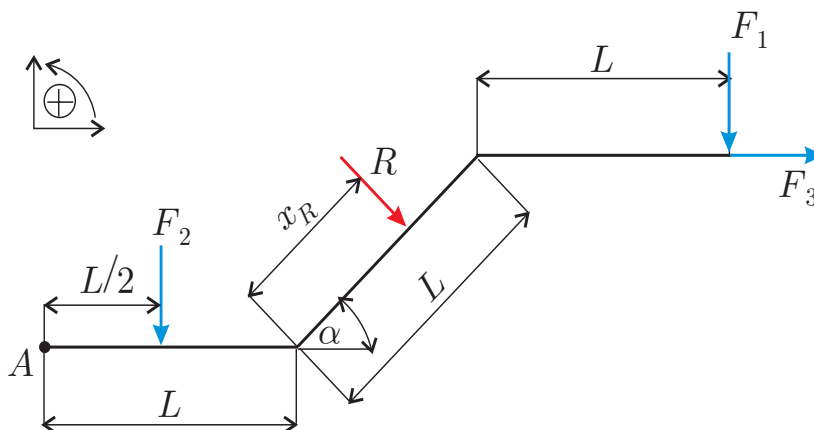
Príklad 9 Určite posuvný a otáčavý účinok silovej sústavy nosnej konštrukcie osvetľovacej rampy k bodu A - obrázok 2.3.



Obrázok 2.3: Príklad 9 - zadanie

Riešenie:

- Náhrada spojitého zaťaženia diskretnou ekvivalentnou silovou sústavou, $R = 1/2qL$, $x_R = 2/3L$ (obr. 2.4).



Obrázok 2.4: Príklad 9 - náhrada spojitého zaťaženia

- Posuvný účinok:

- smer x

$$H_A = F_3 + R \sin \alpha$$

- smer y

$$V_A = -F_1 - F_2 - R \cos \alpha$$

Výsledný účinok

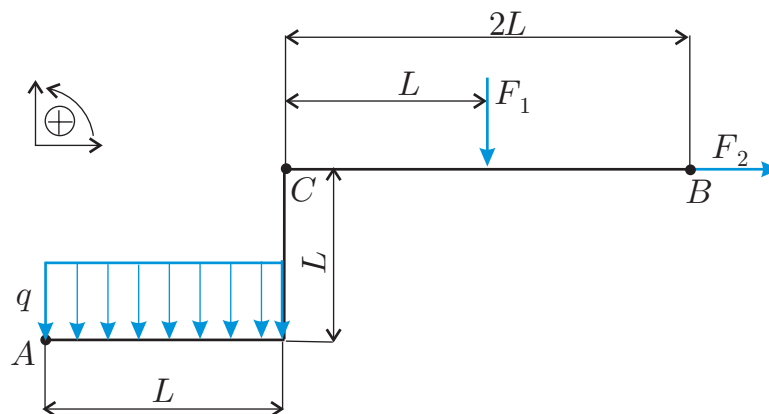
$$F = \sqrt{H_A^2 + V_A^2}$$

- Otáčavý účinok k bodu A .

$$M_A = -F_1(2L + L \cos \alpha) - F_2 L/2 - F_3 L \sin \alpha - R \cos \alpha (L + x_R \cos \alpha) - R x_R \sin \alpha \sin \alpha$$

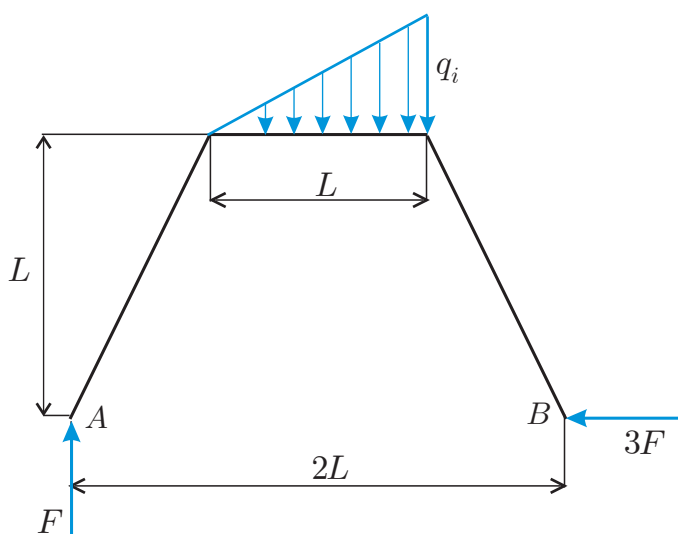
2.3 Neriešené príklady

Príklad 10 Určite posuvný a otáčavý účinok silovej sústavy konštrukcie k bodom A , B a C - obrázok 2.5. Sila $F_1 = 500 \text{ N}$, $F_2 = 1000 \text{ N}$ a spojité zat'azenie $q = 750 \text{ N/m}$. Dĺžka $L = 1 \text{ m}$.



Obrázok 2.5: Príklad 10 - zadanie

Príklad 11 Určite posuvný a otáčavý účinok silovej sústavy konštrukcie k bodom A a B - obrázok 2.6. Sila $F = 1500 \text{ N}$, spojité zat'azenie má trojuholníkový priebeh pričom hodnota $q_i = 750 \text{ N/m}$ a dĺžka $L = 1 \text{ m}$.



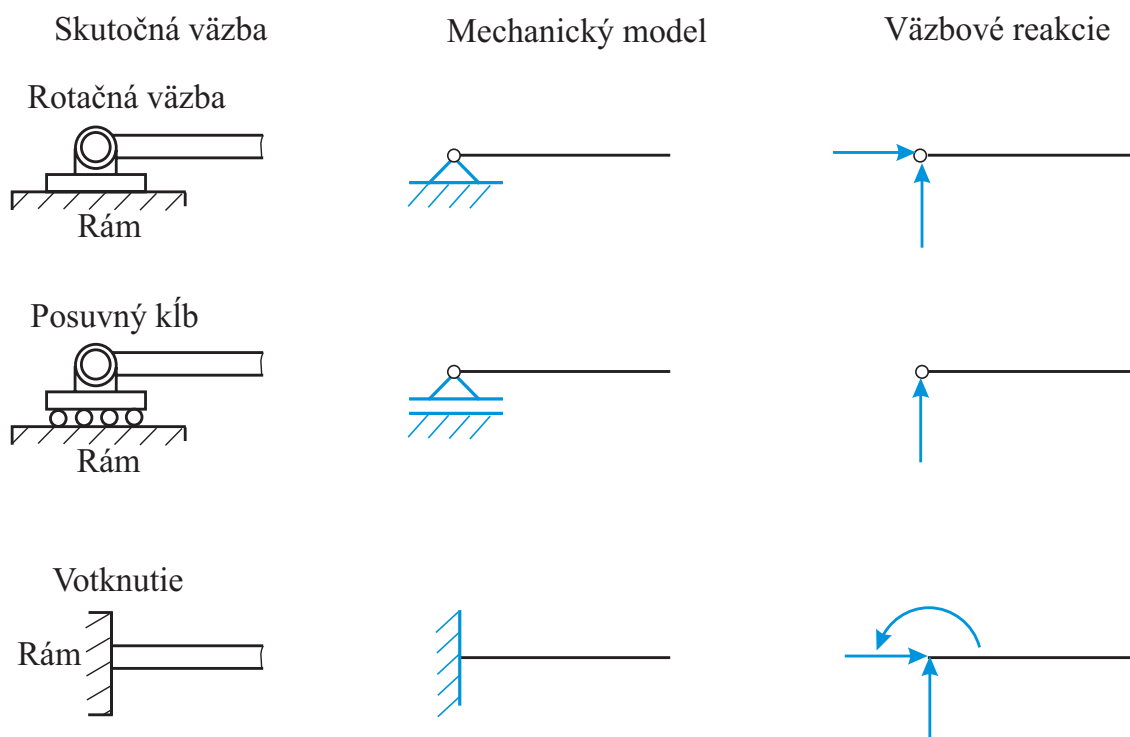
Obrázok 2.6: Príklad 11 - zadanie

Kapitola 3

Väzby a väzbové reakcie

3.1 Základné pojmy

Väzby - je to určité obmedzenie pohybu danej sústavy resp. telesa - odoberajú mu určitý počet stupňov voľnosti. Samotné obmedzenie v skutočnosti je realizované pôsobením iného telesa alebo inej sústavy na skúmaný objekt, pričom toto pôsobenie sa zjednodušuje - zavádza sa pojem väzba (alebo kinematická dvojica).



Obrázok 3.1: Väzby a väzbové reakcie

Väzbové reakcie - sú sekundárne (reakčné) sily vo väzbách, vyvolané zat' ažujúcimi primárnymi (akčnými) silami pôsobiacimi na upevnené teleso.

Stupeň voľnosti - charakterizuje možnosť pohybu telesa alebo sústavy. V priestore má teleso 6 stupňov voľnosti - 3 translačné stupne (v smere x , y a z) a 3 rotačné stupne (okolo osi x , y a z). V rovine má teleso 3 stupne voľnosti - 2 translačné (v smere x a y) a jeden rotačný (okolo osi z) stupeň voľnosti.

Väzby rozdeľujeme do dvoch hlavných skupín:

- vnútorné - viažu sa na objekty, ktoré spolu s nimi vytvárajú sústavu
- vonkajšie - viažu objekt na rám - nepohyblivé teleso

Ďalej môžeme väzby rozdeliť podľa toho, aké stupne voľnosti odoberajú. Najčastejšie sa vyskytujúce typy väzieb v rovine sú zobrazené na obrázku 3.1.

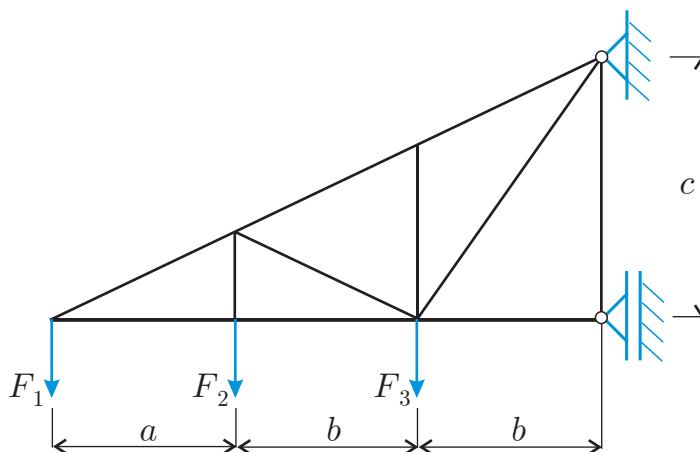
V statike skúmaný objekt nevykonáva žiadny pohyb - ani translačný ani rotačný, t.j. posuvný aj otáčavý účinok celej silovej sústavy (akčné + reakčné sily) musí byť nulový - kapitola 1.

Pri určovaní reakcií vo väzbách sa postupuje nasledovne:

1. skúmaný objekt uvoľníme, t.j. odstránime väzby a nahradíme ich väzbovými reakciami
2. predpokladáme určitú orientáciu väzbových síl - zakreslíme ju do obrázka
3. pre staticky určité úlohy napíšeme statické podmienky, ktorých vyriešením dostávame hľadané reakcie. Ak ich hodnota nám vyjde so znamienkom plus, potom pôsobia tak, ako sme ich do obrázka zakreslili. Záporné reakcie pôsobia v skutočnosti v opačnom zmysle.

3.2 Riešené príklady

Príklad 12 Určite reakcie v uložení ramena stožiaru - prútovej konštrukcie podľa obrázka 3.2.

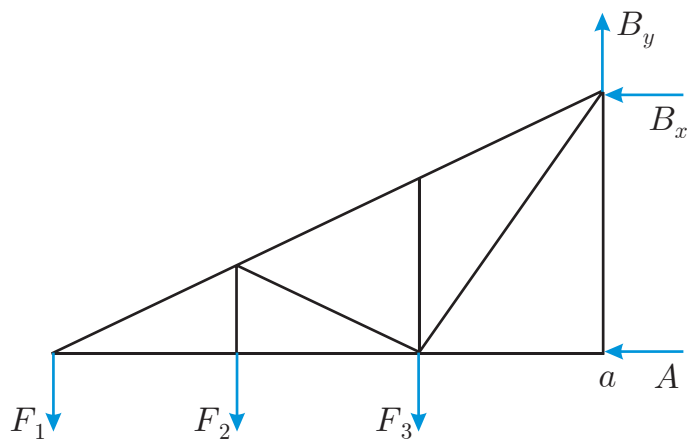


Obrázok 3.2: Príklad 12 - zadanie

Riešenie:

- Nahradenie väzieb väzbovými silami so zvolenou orientáciou - obrázok 3.3.
- Napísanie statických podmienok rovnováhy a výpočet reakcií.

Máme rovinnú úlohu - sústava má 3 stupne voľnosti. Väzbami sme odobrali tri stupne voľnosti a keďže nejde o žiadny nestabilný prípad uloženia väzieb, úloha je staticky



Obrázok 3.3: Príklad 12 - reakcie

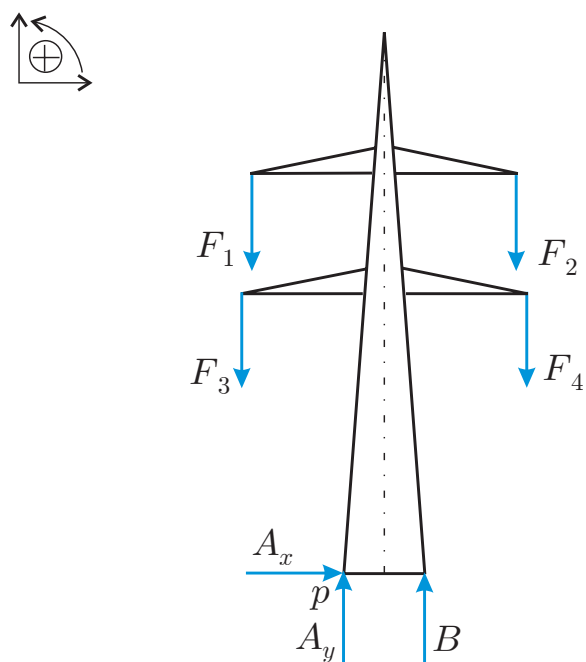
určitá a zo statických podmienok rovnováhy dokážeme vypočítať hľadané reakcie.

$$\begin{aligned}\sum H = 0 : -A - B_x &= 0 \\ \sum V = 0 : B_y - F_1 - F_2 - F_3 &= 0 \\ \sum M_a = 0 : F_1(a + 2b) + F_2 2b + F_3 b + B_x c &= 0\end{aligned}$$

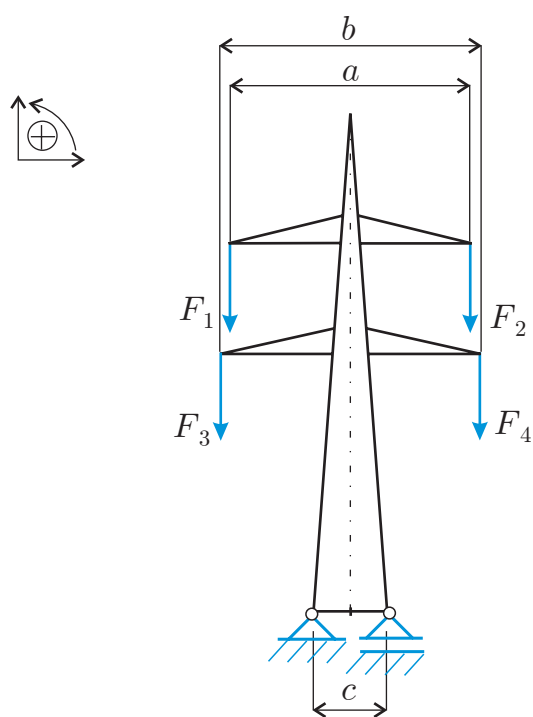
Riešením tohto systému dostávame hľadané reakcie

$$\begin{aligned}A &= -B_x \\ B_x &= -\frac{F_1(a + 2b) + F_2 2b + F_3 b}{c} \\ B_y &= \sum_{i=1}^3 F_i\end{aligned}$$

Príklad 13 Určite reakcie vo väzbách elektrického stožiaru podľa obrázka 3.4.



Obrázok 3.5: Príklad 13 - reakcie



Obrázok 3.4: Príklad 13 - zadanie

Riešenie:

- Nahradenie väzieb väzbovými silami so zvolenou orientáciou - obrázok 3.5.

- Napísanie statických podmienok rovnováhy a výpočet reakcií.

$$\sum H = 0 : A_x = 0$$

$$\sum V = 0 : A_y + B - \sum_{i=1}^4 F_i = 0$$

$$\sum M_p = 0 : F_1 \frac{a-c}{2} - F_2 \frac{a+c}{2} + F_3 \frac{b-c}{2} - F_4 \frac{b-c}{2} + Bc = 0$$

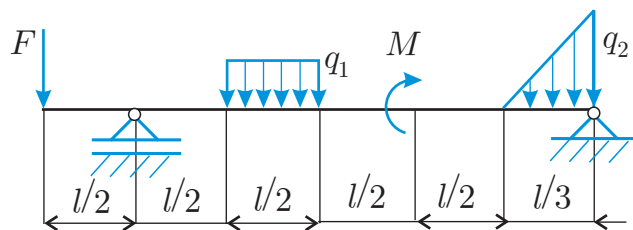
Riešením tohto systému dostávame hľadané reakcie

$$A_x = 0$$

$$A_y = \sum_{i=1}^4 F_i - B$$

$$B = -\frac{1}{c} \left(F_1 \frac{a-c}{2} - F_2 \frac{a+c}{2} + F_3 \frac{b-c}{2} - F_4 \frac{b-c}{2} \right)$$

Príklad 14 Určite reakcie vo väzbách hriadel'a točitého stroja so spojitým zat'ážením podľa obrázka 3.6.



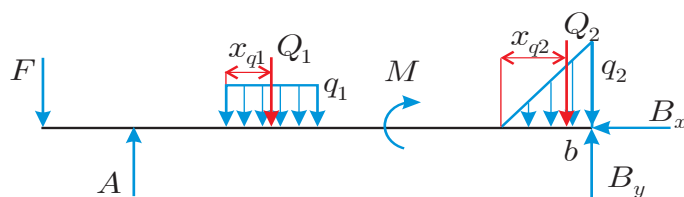
Obrázok 3.6: Príklad 14 - zadanie

Riešenie:

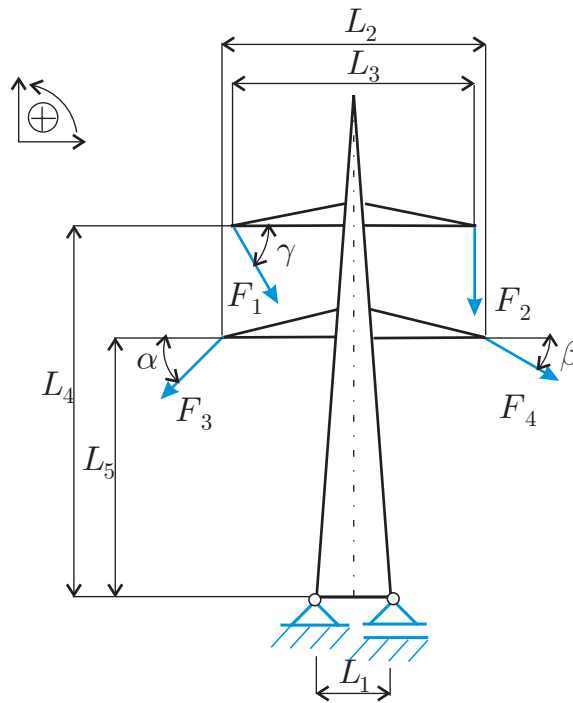
- Nahradenie väzieb väzbovými silami so zvolenou orientáciou a náhrada spojitého zat'áženia diskretnými silami - obrázok 3.7.

$$Q_1 = q_1 l/2 \quad x_{q1} = l/4$$

$$Q_2 = 1/2 q_2 l/3 \quad x_{q2} = 2/9 l$$



Obrázok 3.7: Príklad 14 - náhrada spojitého zat'áženia a reakcie



Obrázok 3.8: Príklad 15 - zadanie

- Napísanie statických podmienok rovnováhy a výpočet reakcií.

$$\begin{aligned}\sum H &= 0 : B_x = 0 \\ \sum V &= 0 : A + B_y - Q_1 - Q_2 - F = 0 \\ \sum M_b &= 0 : -A \frac{7}{3}l + F \frac{17}{6}l + Q_1 \frac{19}{12}l + Q_2 \frac{1}{9}l - M = 0\end{aligned}$$

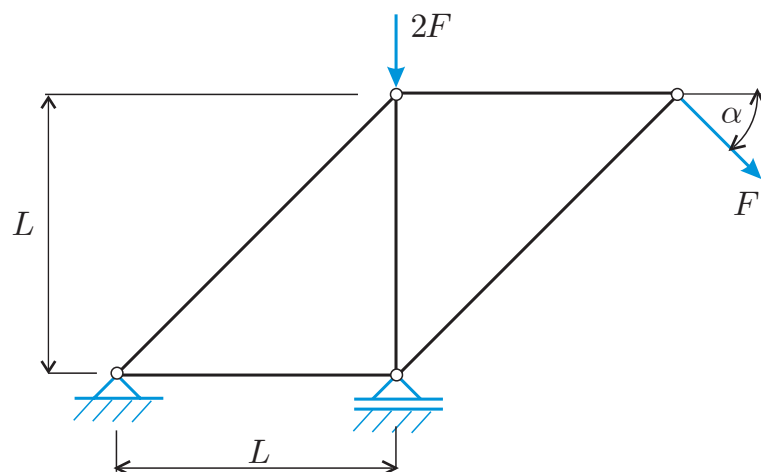
Riešením tohto systému dostávame hľadané reakcie

$$\begin{aligned}A &= \frac{3}{7} \left(F \frac{17}{6} + Q_1 \frac{19}{12} + Q_2 \frac{1}{9} - \frac{M}{l} \right) \\ B_x &= 0 \\ B_y &= Q_1 + Q_2 + F - A\end{aligned}$$

3.3 Neriešené príklady

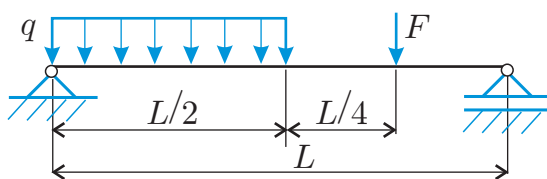
Príklad 15 Určite reakcie vo väzbách elektrického stožiaru podľa obrázka 3.8. Sila $F_1 = 1000 \text{ N}$, $F_2 = 1500 \text{ N}$, $F_3 = 2000 \text{ N}$ a $F_4 = 800 \text{ N}$. Uhol $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$ a $\gamma = 60^\circ$. Dĺžka $L_1 = 1 \text{ m}$, $L_2 = 5 \text{ m}$, $L_3 = 4 \text{ m}$, $L_4 = 10 \text{ m}$ a $L_5 = 6 \text{ m}$.

Príklad 16 Určite reakcie vo väzbách - obrázok 3.9. Sila $F = 1600 \text{ N}$, dĺžka $L = 1 \text{ m}$ a uhol $\alpha = 30^\circ$.



Obrázok 3.9: Príklad 16 - zadanie

Príklad 17 Určite reakcie vo väzbách podľa obrázka 3.10. Sila $F = 500 \text{ N}$, spojité zat'azenie je konštantné $q = 250 \text{ N/m}$ a dĺžka $L = 2 \text{ m}$.



Obrázok 3.10: Príklad 17 - zadanie

Kapitola 4

Prútové sústavy

4.1 Predpoklady riešenia

- Prvky pokladáme za jednorozmerné telesá.
- Spojenie prútov považujeme za klbové bez trenia (je to možné aj pri zváranom, skrutkovom a nitovanom spojení, ak nie sú prúty veľmi krátke).
- Osi jednotlivých prvkov sa musia pretínať v jednom bode - styčníku.
- Zat'azenie je len v styčných bodoch - styčníkové zat'azenie, pri mimostyčníkovom zat'azení sa musí vykonať jeho transformácia do styčných bodov.

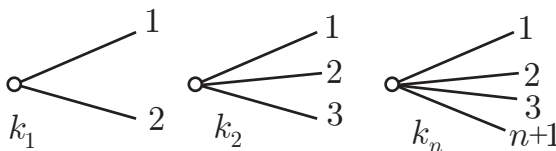
Z predchádzajúcich predpokladov teda vyplýva, že prúty prenášajú len osovú zat'azenie (ťah alebo tlak).

4.2 Statická určitosť rovinných prútových sústav

- Vnútna statická určitosť.

Vnútna statická určitosť závisí od tvaru prútovej sústavy..

$$i_{vn} = 3p - 2(4k_4 + 3k_3 + 2k_2 + k_1) \begin{array}{ll} < 3 - \text{staticky neurčitá sústava (preurčená)} \\ = 3 - \text{staticky určitá sústava} \\ > 3 - \text{staticky neurčitá sústava (podurčená)} \end{array}$$



Obrázok 4.1: Typy styčníkov

kde p je počet prútov, k_n je počet styčníkov n -tého typu.

- Vonkajšia statická určitosť.

Vonkajšia statická určitosť závisí od vonkajšieho uloženia.

$$i_{vo} = 3 - r \quad \begin{array}{l} < 0 - \text{staticky neurčitá sústava} \\ = 0 - \text{staticky určitá sústava} \\ > 0 - \text{staticky neurčitá sústava (podurčená)} \end{array}$$

kde r predstavuje počet stupňov voľnosti odobratých vonkajšími väzbami.

- Celková statická určitosť.

Dáva celkový pohľad na statickú určitosť prútových sústav.

$$i = r + p - 2s \quad \begin{array}{l} < 0 - \text{staticky neurčitá sústava} \\ = 0 - \text{staticky určitá sústava} \\ > 0 - \text{staticky neurčitá sústava (podurčená)} \end{array}$$

kde r je počet stupňov voľnosti odobraté vonkajšími väzbami, p je počet prútov a s je počet styčníc (vrátane tých, ktoré sú upevnené na väzby).

Ak je sústava z vnútorného a aj vonkajšieho hľadiska staticky určitá, potom je aj celkovo staticky určitá. Na to, aby sústava nebola mechanizmom a aby sme ju dokázali riešiť metódami statiky, je potrebné, aby bola vnútorne, vonkajšie a teda aj celkovo staticky určitá.

Na riešenie staticky neurčitých (preurčených) sústav treba použiť metódy pružnosti a pevnosti.

4.3 Metódy riešenia

Medzi najpoužívanéjšie analytické metódy patria styčnícová a priesečná metóda.

- Styčnícová metóda.

Podstatou postupnej styčnícovej metódy je postupné uvoľňovanie styčníc, pričom jednotlivé prúty, ktoré pôsobia na styčník sa nahrádzajú osovými silami v prútoch. Keďže styčník má v rovine dva stupne voľnosti, musíme napísať dve statické podmienky rovnováhy styčníka, pričom pri výbere styčníka postupujeme tak, aby statické podmienky rovnováhy obsahovali iba dve neznáme. V jednotlivých prútoch predpokladáme ťahové napätia, t.j. sily orientujeme von zo styčníka.

- Priesečná metóda.

Touto metódou sa dajú určiť sily v prútoch, ktoré sa nestretajú v jednom bode. Myslený rez vedieme cez celú prútovú sústavu, maximálne však cez tri prúty, pričom do týchto troch prútov vložíme výslednice vnútorných síl. Na jednu z dvoch odrezaných častí konštrukcie kladieme tri podmienky rovnováhy (úloha je rovinná), ktoré sú lineárne nezávislé - najčastejšie tri momentové podmienky. Výhodné je pracovať s tou časťou konštrukcie, ktorá obsahuje menej vonkajších síl (vrátane reakcií) alebo je geometricky jednoduchšia.

4.4 Riešené príklady

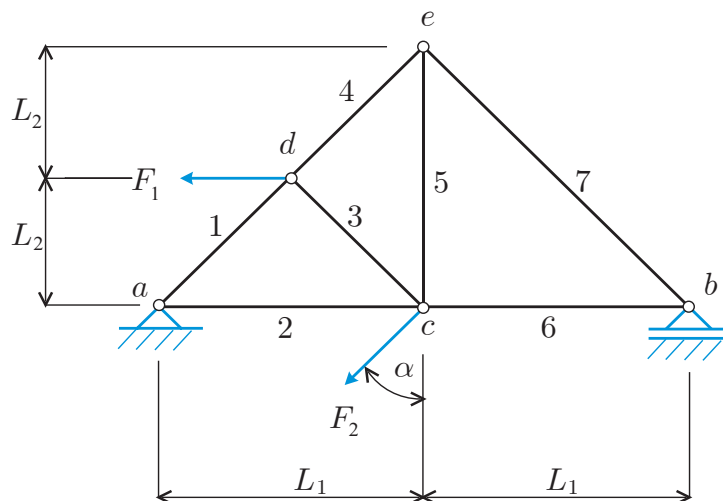
Príklad 18 Určite väzbové reakcie a sily v prútoch prútovky podľa obrázku 4.2, keď sú dané: $F_1 = 2 \text{ kN}$, $F_2 = 5 \text{ kN}$, $L_1 = 0,8 \text{ m}$, $L_2 = 1 \text{ m}$ a $\alpha = 40^\circ$. Úlohu riešte styčnícovou metódou.

Riešenie:

1. Určenie statickej určitosti sústavy.

- Vnútorná statická určitosť:

$$i_{vn} = 3 \cdot 7 - 2(3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2) = 3 \Rightarrow \text{z vnútorného hľadiska je sústava staticky určitá.}$$



Obrázok 4.2: Príkladu 18 - zadanie

- Vonkajšia statická určitosť:

$$i_{vo} = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \text{z vonkajšieho hľadiska je sústava staticky určitá.}$$

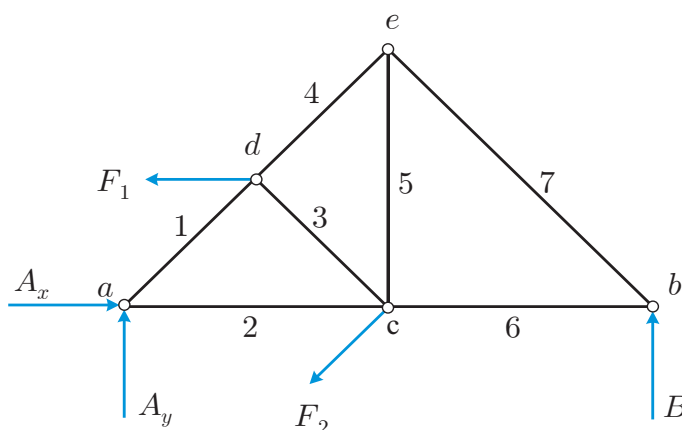
- Celková statická určitosť:

$$i = 3 + 7 - 2 \cdot 5 = 0 \Rightarrow \text{z celkového hľadiska je sústava staticky určitá.}$$

Sústavu môžeme riešiť metódami statiky, lebo je z vnútorného aj z vonkajšieho hľadiska staticky určitá.

2. Určenie väzbových reakcií.

Väzbové reakcie vo väzbách a a b určíme metódou uvoľnenia telesa – t.j. odstránime väzby, nahradíme ich väzbovými reakciami a napíšeme statické podmienky rovnováhy. Na systém prútov sa pri určovaní reakcií pozeráme ako na jedno teleso - obrázok 4.3.



Obrázok 4.3: Príklad 18 - väzbové reakcie

Statické podmienky rovnováhy:

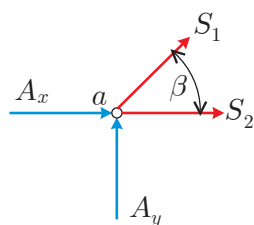
$$\begin{aligned}\sum H = 0 : A_x - F_1 - F_2 \sin \alpha &= 0 \\ \sum V = 0 : A_y + B - F_2 \cos \alpha &= 0 \\ \sum M_a = 0 : B 2L_1 + F_1 L_2 - F_2 L_1 &= 0\end{aligned}$$

Riešením tohto systému dostaneme pre hľadané reakcie

$$\begin{aligned}A_x &= F_1 + F_2 \sin \alpha = 5,2 \text{ kN} \\ B &= \frac{1}{2}F_2 - \frac{1}{2}F_1 \frac{L_2}{L_1} = 1,25 \text{ kN} \\ A_y &= F_2 \cos \alpha - B = 2,58 \text{ kN}\end{aligned}$$

3. Určenie síl v jednotlivých prútoch postupnou styčnickovou metódou.

Styčník a:

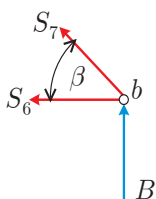


$$\begin{aligned}\sum H = 0 : A_x + S_2 + S_1 \cos \beta &= 0 \\ \sum V = 0 : A_y + S_1 \sin \beta &= 0\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}S_1 &= -2,78 \text{ kN} \\ S_2 &= -4,17 \text{ kN}\end{aligned}$$

pričom

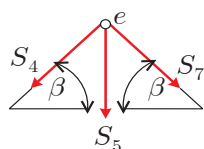
$$\beta = \arctg \frac{2L_2}{L_1} = 68,20^\circ$$

Styčník b:



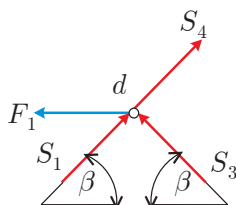
$$\begin{aligned}\sum H = 0 : -S_6 - S_7 \cos \beta &= 0 \\ \sum V = 0 : B + S_7 \sin \beta &= 0\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}S_6 &= 0,50 \text{ kN} \\ S_7 &= -1,35 \text{ kN}\end{aligned}$$

Styčník e:



$$\begin{aligned}\sum H = 0 : S_7 \cos \beta - S_4 \cos \beta &= 0 \\ \sum V = 0 : -S_7 \sin \beta - S_4 \sin \beta - S_5 &= 0\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}S_4 &= -1,35 \text{ kN} \\ S_5 &= 2,51 \text{ kN}\end{aligned}$$

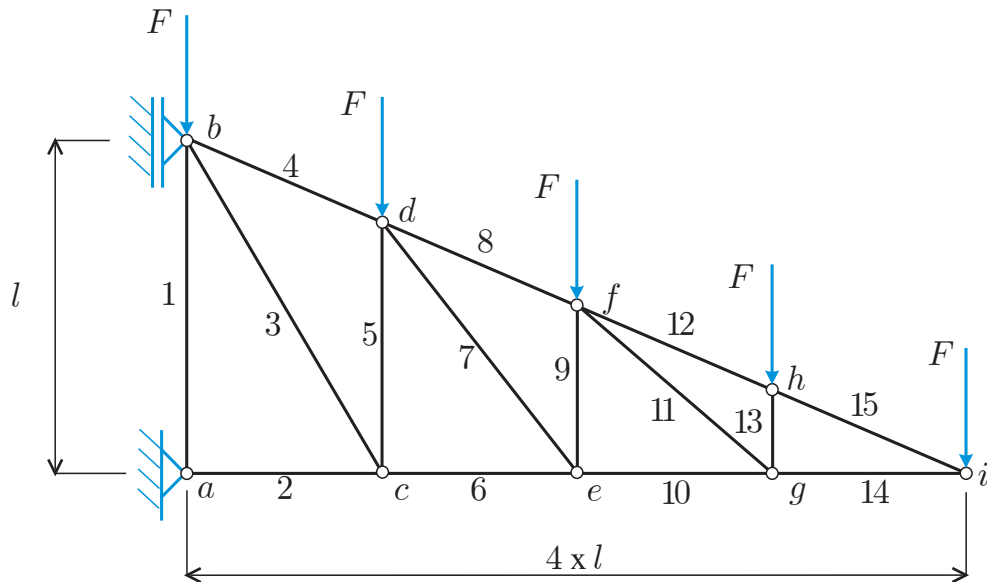
Styčník d:



$$\sum V = 0 : S_4 \sin \beta - S_1 \sin \beta - S_3 \sin \beta = 0 \Rightarrow S_3 = 1,43 \text{ kN}$$

V prútoch 3, 5 a 6 je ťah, v prútoch 1, 2, 4 a 7 je tlak. Najviac namáhaný je prút 2. Ako je vidno, na určenie síl vo všetkých prútoch sme nemuseli napísať statické podmienky rovnováhy pre všetky styčníky. Obe rovnice pre styčník c a rovnica pre horizontálny smer pre styčník d môžu byť brané ako kontrolné rovnice správnosti vypočítaných síl v prútoch.

Príklad 19 Určite väzby a osovú silu v prútoch 6, 7 a 8 ramena stožiaru priesečnou metódou - obrázok 4.4.



Obrázok 4.4: Príklad 19 - zadanie

Riešenie:

1. Určenie statickej určitosti sústavy.

- Vnútoraná statická určitosť:

$$i_{vn} = 3 \cdot 15 - 2(3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 2) = 3 \Rightarrow \text{z vnútorného hľadiska je sústava staticky určitá.}$$

- Vonkajšia statická určitosť:

$$i_{vo} = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \text{z vonkajšieho hľadiska je sústava staticky určitá.}$$

- Celková statická určitosť:

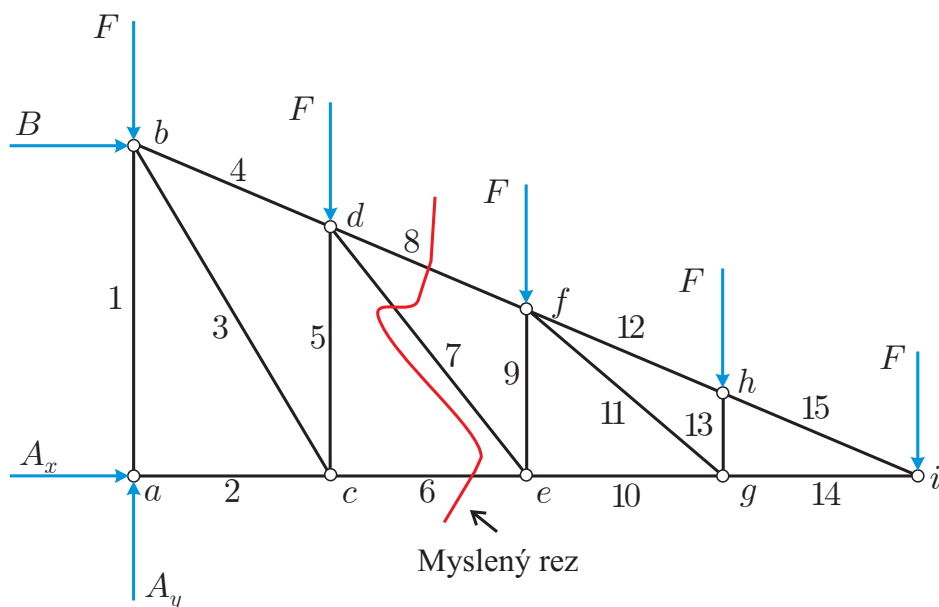
$$i = 3 + 15 - 2 \cdot 9 = 0 \Rightarrow \text{z celkového hľadiska je sústava staticky určitá.}$$

Sústavu môžeme riešiť, lebo je celkovo staticky určitá.

2. Určenie väzbových reakcií.

Pri určovaní väzbových reakcií postupujeme rovnakým spôsobom ako v predchádzajúcom príklade – t.j. väzby odstránime a nahradíme ich väzbovými reakciami - obrázok 4.5.

Statické podmienky rovnováhy:



Obrázok 4.5: Príklad 19 - väzbové reakcie a myslený rez

$$\begin{aligned}\sum H &= 0 : A_x + B = 0 \\ \sum V &= 0 : A_y - 5F = 0 \\ \sum M_a &= 0 : -B \cdot l - \sum_{i=1}^4 F(l(5-i)) = 0\end{aligned}$$

Riešením tohto systému dostávame

$$\begin{aligned}B &= -\sum_{i=1}^4 F(5-i) = -10F \\ A_x &= -B = 10F \\ A_y &= 5F\end{aligned}$$

3. Určenie síl v prútoch 6, 7 a 8 priesečnou metódou.

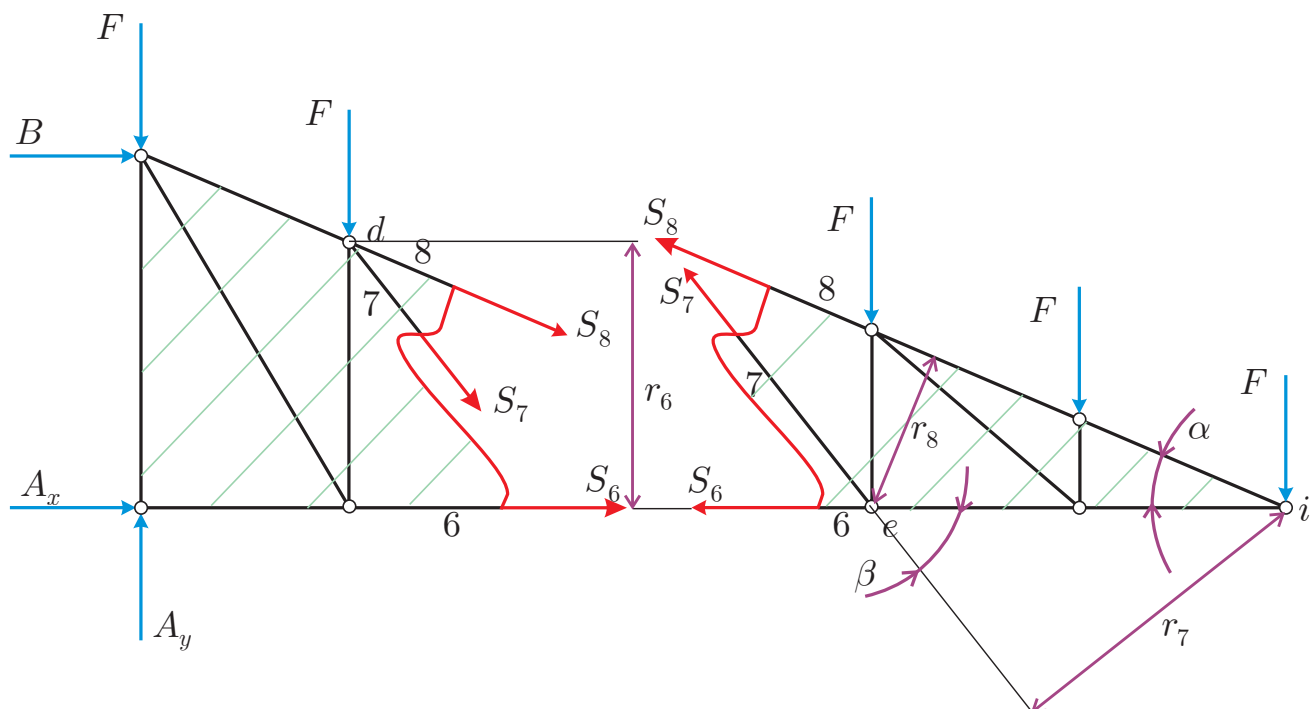
Rez cez prúty 6, 7 a 8 je znázornený na obrázku 4.5.

Vzhľadom na geometriu a aj vonkajšie zaťaženie sme si vybrali na napísanie troch statických podmienok rovnováhy pravú časť konštrukcie. Na určenie momentov budeme potrebovať tieto parametre, ktoré sú zakreslené v obrázku 4.6.

$$\text{uhol } \alpha : \alpha = \arctg \frac{1}{4}$$

$$\text{uhol } \beta : \beta = \arctg \frac{3}{4}$$

$$\text{rameno sily } S_6 \text{ k bodu } d: r_6 = \frac{3}{4}l$$



Obrázok 4.6: Príklad 19 - rozdelená sústava so silami v prútoch 6, 7 a 8

rameno sily S_7 k bodu i : $r_7 = 2l \sin \beta$

rameno sily S_8 k bodu e : $r_8 = 2l \sin \alpha$

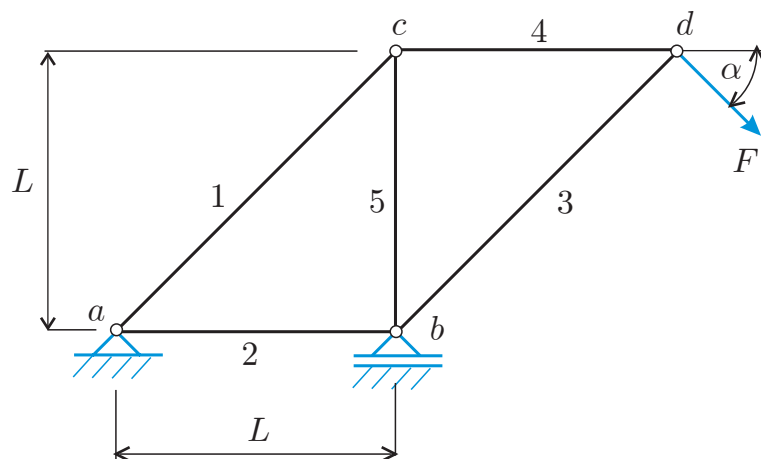
$$\sum M_d = 0 : -Fl(3 + 2 + 1) - S_6 r_6 = 0 \Rightarrow S_6 = -8F$$

$$\sum M_i = 0 : Fl(1 + 2) - S_7 r_7 = 0 \Rightarrow S_7 = \frac{3}{2 \sin \beta} F$$

$$\sum M_e = 0 : -Fl(2 + 1) + S_8 r_8 = 0 \Rightarrow S_8 = \frac{3}{2 \sin \alpha} F$$

4.5 Neriešené príklady

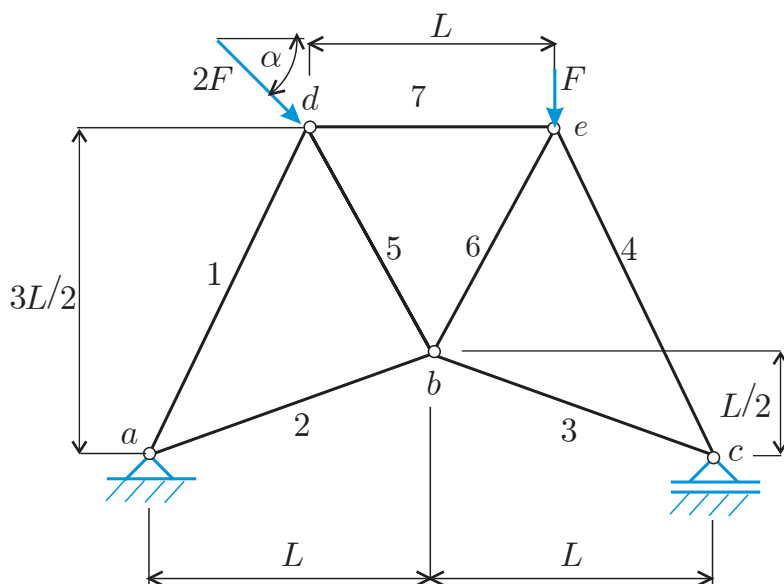
Príklad 20 Určite väzbové reakcie a sily v prútoch prútovej sústavy podľa obrázka 4.7, keď je dané: $F = 5 \text{ kN}$, $\alpha = 45^\circ$ a $L = 3 \text{ m}$.



Obrázok 4.7: Príklad 20 - zadanie

Príklad 21 Určite postupnou styčnickovou metódou sily vo všetkých prútoch prútovej sústavy podľa obrázka 4.4 - príklad 19.

Príklad 22 Určite postupnou styčnickovou metódou sily vo všetkých prútoch prútovej sústavy podľa obrázka 4.8. Sila $F = 800 \text{ N}$, uhol $\alpha = 45^\circ$, dĺžka $L = 1 \text{ m}$.



Obrázok 4.8: Príklad 22 - zadanie

Kapitola 5

Ťah - tlak

5.1 Pomerné predĺženie

Pomerné predĺženie je definované nasledovne

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (5.1)$$

odkiaľ pre celkové predĺženie dostávame

$$\Delta L = \int_{(L)} \Delta dx = \int_{(L)} \varepsilon(x) dx \quad (5.2)$$

Z Hookovho zákona pre pomerné predĺženie dostávame

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E(x)} = \frac{N(x)}{S(x)E(x)} \quad (5.3)$$

kde $N(x)$ je vnútorná osová sila, $S(x)$ je prierez prúta a $E(x)$ je modul pružnosti v ťahu. A teda celkové predĺženie

$$\Delta L = \int_{(L)} \frac{N(x)}{S(x)E(x)} dx \quad (5.4)$$

Pre konštantný prierez a nemeniace sa materiálové vlastnosti po dĺžke môžeme písať

$$\Delta L = \frac{1}{SE} \int_{(L)} N(x) dx \quad (5.5)$$

Ako je vidno z predchádzajúceho vzťahu, na určenie celkového predĺženia je potrebné poznať vnútorné osovú silu $N(x)$. Na určenie týchto vnútorných osových síl použijeme metódu rezu vo vhodne zvolených úsekoch. Je potrebné určiť toľko úsekov, koľko razy sa skokovo mení zaťaženie.

5.2 Vnútorné napätie a dimenzovanie

Pri určovaní vnútorného napätia sa vychádza z osových síl

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{S(x)} \quad (5.6)$$

Ak je úlohou určiť priebeh vnútorných napätí, treba opäť použiť metódu rezu. Tu ale treba voliť rez nie len tam, kde sa mení skokom vonkajšie zaťaženie ale aj tam, kde sa mení skokom prierez.

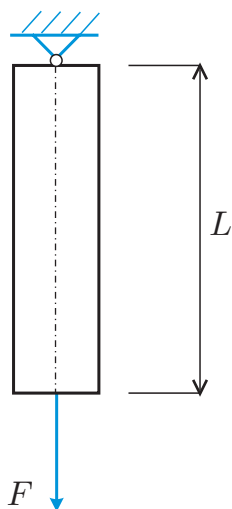
Pri dimenzovaní sa vychádza z nerovnosti

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_D \quad (5.7)$$

kde σ_D je dovoľené napätie a jeho veľkosť závisí na použitom type materiálu a $\sigma_{\max}$ je absolútna hodnota maximálneho napätia v prúde.

5.3 Riešené príklady

Príklad 23 Izolátor na obrázku 5.1 je zaťažený ťahovou silou $F = 5000 \text{ N}$ – pôsobenie vodiča. Vplyv vlastnej tiaže uvažujte raz ako diskretnú silu s pôsobiskom v ťažisku a druhý raz ako spojite rozloženú silu, pričom merná hmotnosť materiálu izolátora je $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$. Dĺžka izolátora je $L = 1 \text{ m}$. Prierez izolátora je $S = 0,03 \text{ m}^2$. Modul pružnosti v ťahu $E = 1 \times 10^5 \text{ MPa}$. Vypočítajte reakcie v uložení, celkové predĺženie izolátora a nakreslite priebeh vnútorných síl.



Obrázok 5.1: Príklad 23 - zadanie

Riešenie:

1. Tiaž ako diskretná sila pôsobiaca v ťažisku.

- Výpočet reakcií.

Celkovú tiaž izolátora G umiestnime do ťažiska izolátora, ktorého poloha je v geometrickom strede izolátora. Väzby nahradíme väzbovými reakciami a napíšeme statické podmienky rovnováhy.

Keďže v smere osi x nepôsobí žiadna vonkajšia sila, musí byť aj reakcia v tomto smere nulová, t.j. $A_x = 0$. Statické podmienky sa potom zredukujú na jedinú rovnicu v smere y :

$$\sum V = 0 : A_y - G - F = 0$$

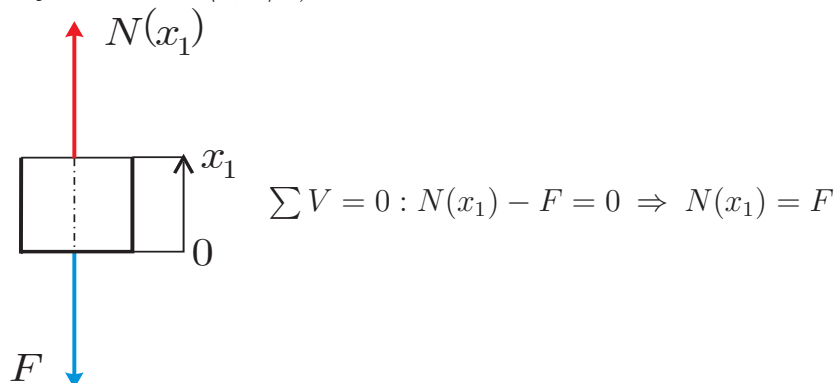
Riešením tohto systému dostávame

$$A_y = G + F = S \cdot L \cdot \rho \cdot g + F = 5676,9 \text{ N}$$

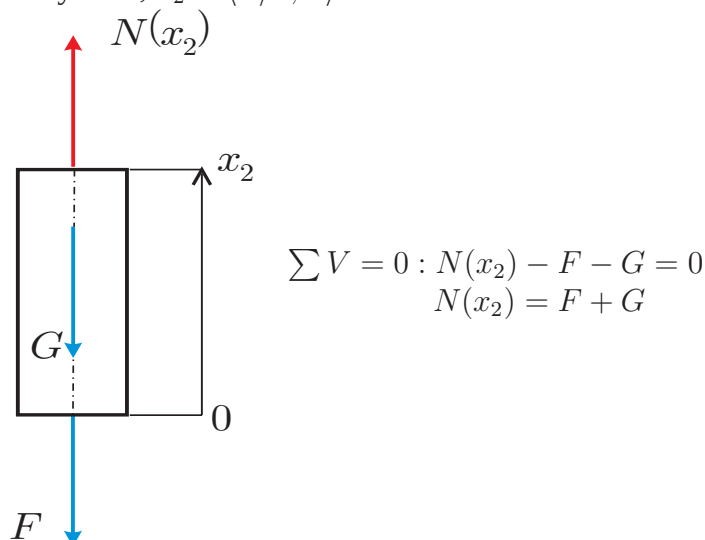
- Výpočet celkového predĺženia.

Pomerné predĺženie pre prút konštantného prierezu je definované rovnicou (5.5). Na jeho určenie musíme ale poznať priebeh vnútorných síl $N(x)$. Keďže uvažujeme v tomto prípade s tiažou ako diskretnou silou, tak počet potrebných úsekov, kde sa skokom mení vonkajšie zaťaženie sú dva.

- Prvý úsek, $x_1 \in \langle 0, L/2 \rangle$:



- Druhý úsek, $x_2 \in \langle L/2, L \rangle$:

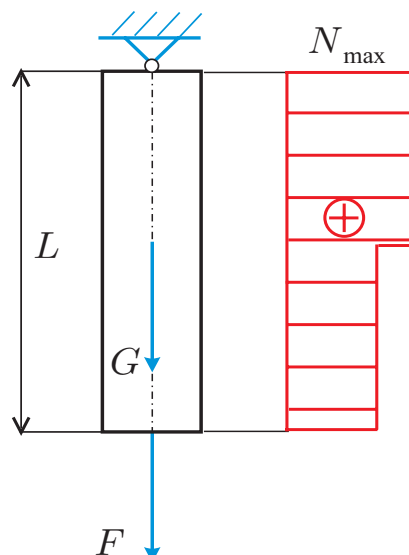


Celkové predĺženie ΔL

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{1}{SE} \left[\int_0^{L/2} N(x_1) dx_1 + \int_{L/2}^L N(x_2) dx_2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{FL}{SE} + \frac{1}{2} \frac{(F + G)L}{SE} = 1,78 \times 10^{-6} \text{ m} \end{aligned}$$

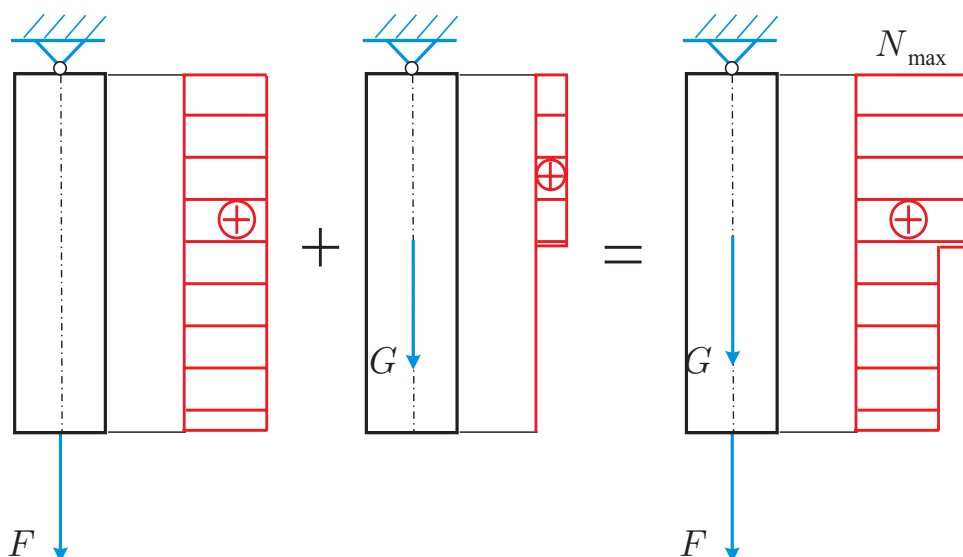
- Priebeh vnútorných síl.

Spojením predchádzajúcich dvoch úsekov dostávame celkový priebeh vnútornej osovej sily po celej dĺžke nosníka. Tento priebeh je znázornený na obrázku 5.2.



Obrázok 5.2: Príklad 23 - priebeh vnútorných osových síl

Pri určovaní priebehu vnútorných síl sa môže vychádzať aj z toho, že ide o lineárnu úlohu a teda tu platí princíp superpozície účinkov. To znamená, že na výsledné zaťaženie od oboch síl F a G sa môžeme pozerat' ako na dve nezávislé zaťaženia, ktorých účinky možno superponovať - obrázok 5.3.



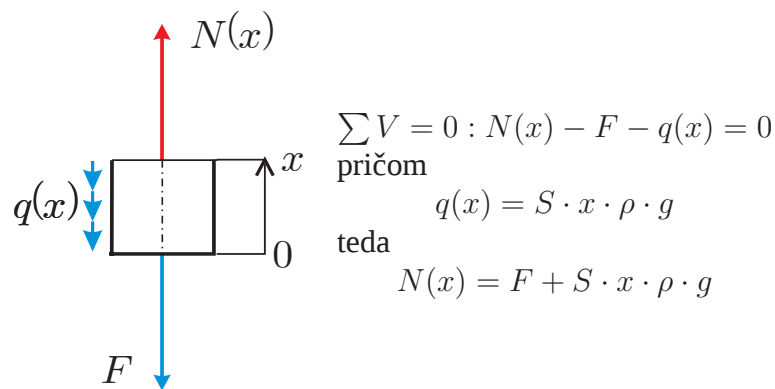
Obrázok 5.3: Príklad 23 - princíp superpozície účinkov síl

2. Tiaž ako spojite rozložená sila.

- Výpočet celkového predĺženia.

Aj tu musíme najskôr určiť vnútorné osovú sily. Keďže pri spojitě rozloženej hmotnosti už okrem F nepôsobí v poli prúta iná diskretná sila, celý priebeh vnútorných síl sa popíše iba jedným úsekom.

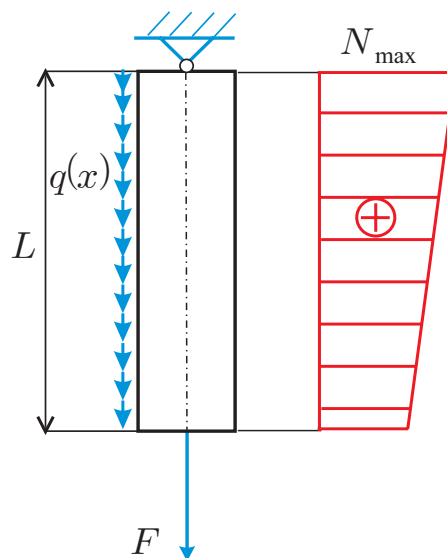
- Úsek $x \in \langle 0, L \rangle$:



Celkové predĺženie ΔL

$$\Delta L = \frac{1}{SE} \int_0^L N(x) dx = \frac{1}{SE} \left[FL + S\rho g \frac{L^2}{2} \right] = 1,78 \times 10^{-6} \text{ m}$$

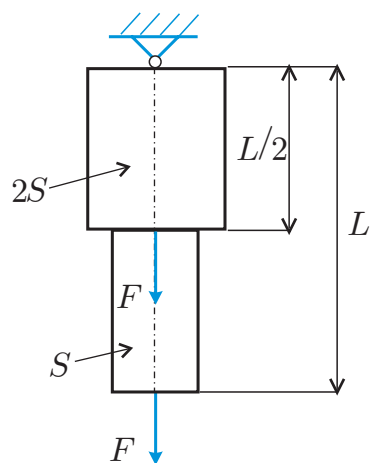
- Priebeh vnútorných síl.



Obrázok 5.4: Príklad 23 - priebeh vnútorných osových síl pri spojitě rozloženej tiaži

5.4 Neriešené príklady

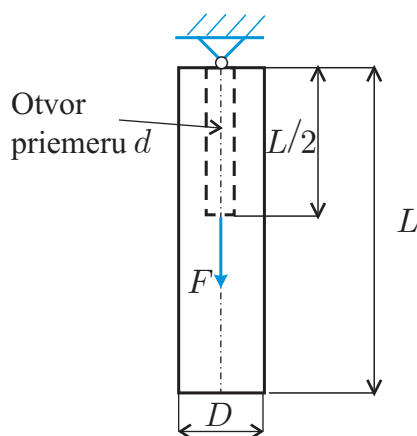
Príklad 24 Vypočítajte reakciu v uložení, celkové predĺženie a nakreslite priebeh vnútorných osových síl a napätí prúta podľa obrázka 5.5.



Obrázok 5.5: Príklad 24 - zadanie

Príklad 25 Ako sa zmení priebeh napätí z príkladu 24, keď budem uvažovať aj vplyv vlastnej tiaže, pričom tiaž uvažujeme ako spojite rozložené zaťaženie. Parametre sú: sila $F = 1500$ N, dĺžka $L = 0,8$ m, prierezová plocha $S = 0,03$ m² a hustota $\rho = 7850$ kg/m³. Tiažové zrýchlenie uvažujte $9,81$ m/s².

Príklad 26 Nakreslite priebeh vnútorných osových síl a napätí kruhovej tyče podľa obrázku 5.6, pričom uvažujte aj s vplyvom vlastnej tiaže ako spojite rozloženého zaťaženia. Pomer $D/d = 2$.



Obrázok 5.6: Príklad 26 - zadanie

Kapitola 6

Ťah - tlak, staticky neurčité úlohy

6.1 Postup pri riešení staticky neurčitých úlohách

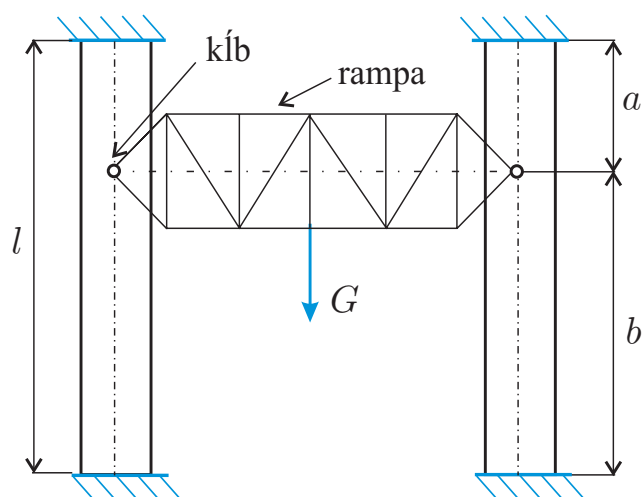
Pri úlohách, kde sme odobrali viac stupňov voľnosti telesu alebo sústave telies ako bolo potrebné, nedokážeme zo statických podmienok rovnováhy vypočítať hľadané väzbové reakcie. Preto musíme k statickým podmienkam rovnováhy napísať ďalšiu doplňujúcu podmienku - tzv. deformačnú podmienku.

Všeobecný postup pri riešení staticky neurčitých sústav:

1. odstránime prebytočnú väzbu tak, aby sme dostali základný systém staticky určitý. Účinnok väzby nahradíme zatiaľ neznámou reakciou
2. napíšeme deformačnú podmienku tak, aby deformácia telesa pôvodného a uvoľneného bola rovnaká.

6.2 Riešené príklady

Príklad 27 Určite polohu rampy - obrázok 6.1 tak, aby napätie bolo po tyči rovnomerne rozložené a nadimenzujte priemer d , keď poznáte σ_D . Tiaž rampy je G .

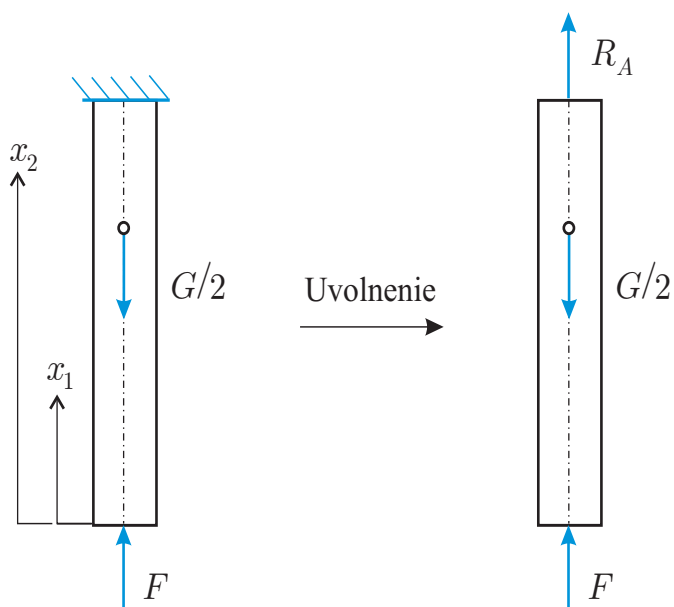


Obrázok 6.1: Príklad 27 - zadanie

Riešenie:

Vzhľadom na symetriu úlohy stačí riešiť len jednu tyč.

- Odstránenie prebytočnej väzby, jej nahradenie neznámou silou F a napísanie statických podmienok rovnováhy.



Obrázok 6.2: Príklad 27 - uvolnenie väzieb

$$\sum V = 0 : F - G/2 + R_A = 0$$

- Deformačná podmienka.

Ako deformačná podmienka sa nám núka posunutie v pôsobisku neznámej sily F (väzbovej reakcie)

$$u_F = 0 = \Delta l$$

Celkové predĺženie pri konštantnom priereze je definované vzt'ahom (5.5). Na jeho určenie potrebujeme mať vyjadrené vnútorné sily $N(x_1)$ a $N(x_2)$ pre úseky $x_1 \in \langle 0, b \rangle$ a $x_2 \in \langle b, l \rangle$.

$$\begin{aligned} N(x_1) &= -F \\ N(x_2) &= -F + G/2 \end{aligned}$$

Potom pre posunutie pôsobiska sily F platí

$$\begin{aligned} u_F = 0 &= \frac{1}{SE} \int_{(L)} N(x) dx = \frac{1}{SE} (-Fb - Fa + G/2a) = \\ &= \frac{1}{SE} (-Fl + G/2a) \end{aligned}$$

A teda pre F dostávame

$$F = \frac{1}{2} \frac{a}{l} G$$

Zo statickej podmienky rovnováhy dostávame

$$R_A = G/2 - F = \frac{1}{2} G \left(1 - \frac{a}{l} \right) = \frac{1}{2} \frac{b}{l} G$$

- Určenie polohy rampy.

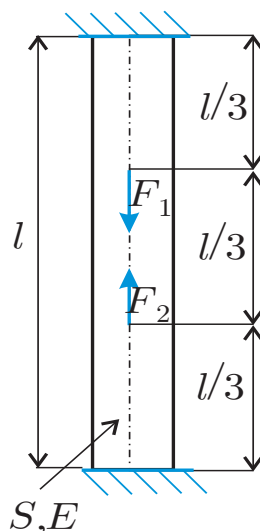
Keďže rampa má byť umiestnená tak, aby napätie bolo konštantné, musíme najskôr určiť napätia v oboch úsekoch stĺpu.

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{S} = -\frac{1}{2} \frac{a}{l} \frac{G}{S}$$

$$\sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{S} = \frac{1}{2} \frac{b}{l} \frac{G}{S}$$

Aby bolo napätie rovnomerne rozdelené po dĺžke stĺpa, musí platiť $\sigma(x_1) = \sigma(x_2)$ a teda $a = b = l/2$. To zároveň definuje potrebnú polohu rampy na stĺpe.

Príklad 28 Určite priebeh napätí po dĺžke stĺpa - obrázok 6.3.



Obrázok 6.3: Príklad 28 - zadanie

Riešenie:

- Pretransformovanie na staticky určitú úlohu.

Deformačná podmienka

$$\Delta l = u_F = 0 = -\frac{Fl}{SE} - \frac{2}{3} \frac{F_2 l}{SE} + \frac{1}{3} \frac{F_1 l}{SE} \Rightarrow F = \frac{1}{3} F_1 - \frac{2}{3} F_2$$

- Výpočet napätí.

$$x_1 \in \langle 0, l/3 \rangle$$

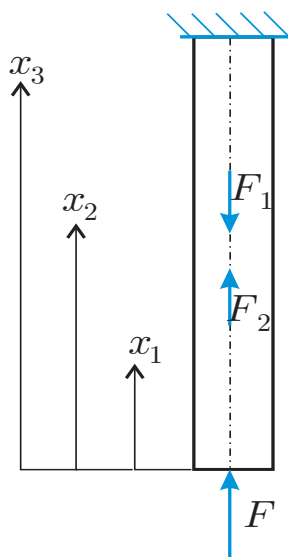
$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{SE} = -\frac{F}{SE} = -\frac{1}{3} \frac{F_1}{SE} + \frac{2}{3} \frac{F_2}{SE}$$

$$x_2 \in \langle l/3, 2l/3 \rangle$$

$$\sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{SE} = -\frac{F}{SE} - \frac{F_2}{SE} = -\frac{1}{3} \frac{F_1}{SE} + \frac{2}{3} \frac{F_2}{SE} - \frac{F_2}{SE} = -\frac{1}{3} \frac{F_1}{SE} - \frac{1}{3} \frac{F_2}{SE}$$

$$x_3 \in \langle 2l/3, l \rangle$$

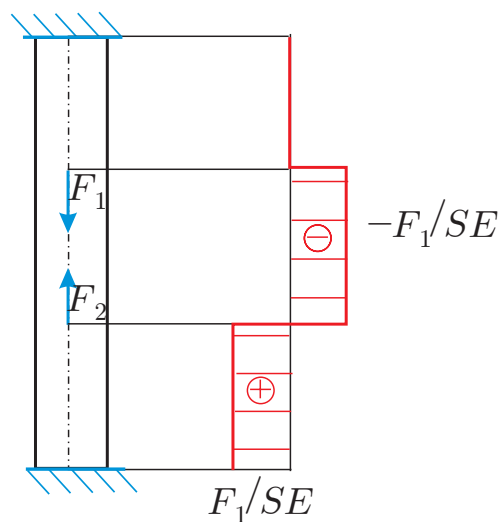
$$\begin{aligned} \sigma(x_3) &= \frac{N(x_3)}{SE} = -\frac{F}{SE} - \frac{F_2}{SE} + \frac{F_1}{SE} = -\frac{1}{3} \frac{F_1}{SE} + \frac{2}{3} \frac{F_2}{SE} - \frac{F_2}{SE} + \frac{F_1}{SE} = \\ &= \frac{2}{3} \frac{F_1}{SE} - \frac{1}{3} \frac{F_2}{SE} \end{aligned}$$



Obrázok 6.4: Príklad 28 - odstránenie prebytočnej väzby

- Priebeh napätí.

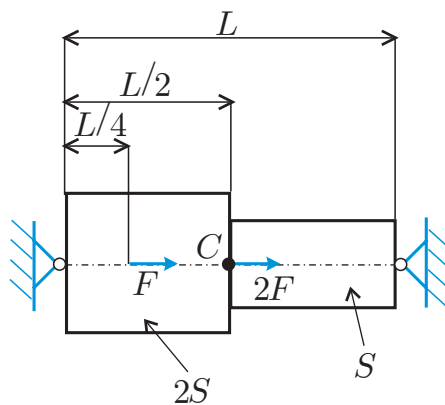
Priebeh napätí pre prípad $F_2 = 2F_1$ je znázornený na obrázku 6.5.



Obrázok 6.5: Príklad 28 - priebeh vnútorných napätí

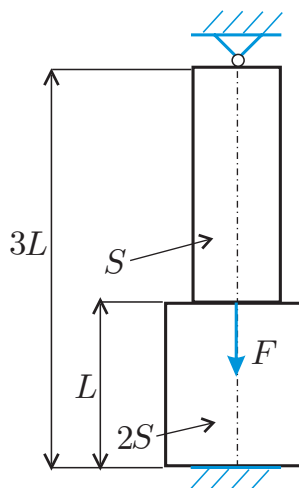
6.3 Neriešené príklady

Príklad 29 Určite posunutie bodu C , nakreslite priebehy vnútorných osových síl a napätí hriadeľa zatváženého a uchyteného podľa obrázka 29.



Príklad 29 - zadanie

Príklad 30 Určite reakcie v uložení a nakreslite priebeh vnútorných osových síl a napätí pre tyč znázornenú na obrázku 6.6. Uvažujte vplyv vlastnej tiaže ako spojité rozložené zat'azenie, pričom hustota materiálu ρ je známa.



Obrázok 6.6: Príklad 30 - zadanie

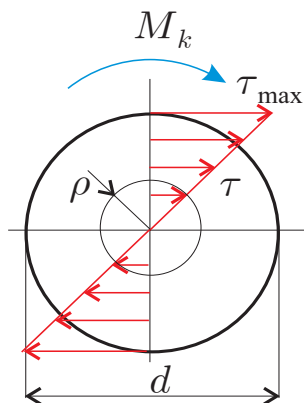
Príklad 31 Ak by sme uvažovali v príklade 30, že celá tiaž tyče pôsobí v jeho ťažisku, malo by to vplyv na reakcie vo väzbách? Ako sa zmení priebeh vnútorných osových síl a napätí?

Kapitola 7

Krútenie kruhových a medzikruhových prierezov

7.1 Základné vzťahy a dimenzovanie

Pri namáhaní krútením vznikajú šmykové napätia, pričom kruhové prierezy zostávajú rovinné a ich priemer sa nemení. Samotné šmykové napätia majú po kruhovom priereze lineárny priebeh - obrázok 7.1. V ťažisku prierezu je nulové a potom lineárne narastá s veľkosťou polomeru ρ . Najväčšie šmykové napätie je na vonkajšom polomere. Vo všetkých bodoch príslušného polomeru je rovnako veľké.



Obrázok 7.1: Rozloženie napätia po priereze

$$\tau(\rho) = \frac{M_k(x)}{J_p(x)} \rho \quad (7.1)$$

$M_k(x)$ je vnútorný krútiaci moment v reze x , ktorý sa môže po dĺžke hriadel'a meniť.

$J_p(x)$ je odporový moment v krútení, $J_p = \pi d^4/32$ - pre konštantný kruhový prierez.

ρ je polomer kružnice bodu, kde určujeme napätie.

Pri kontrole pevnosti a pri dimenzovaní sa treba zamerať na maximálne napätie $\tau_{\max}$, ktoré je na vonkajšom obvode prierezu. Pevnostná podmienka krútenia má tvar:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k} \leq \tau_D \quad (7.2)$$

W_k je prierezový modul v krútení. $W_k = J_p/\rho_{\max} = 2J_p/d = \pi d^3/16 \doteq 0,2d^3$ [m³]. τ_D je dovolené napätie v šmyku.

Pre celkový uhol skrútenia platí vzťah

$$\varphi = \int_{(L)} \frac{M_k(x)}{GJ_p(x)} dx \quad (7.3)$$

G je modul pružnosti v šmyku.

Pre medzikruhový prierez, ktorý je charakterizovaný vonkajším priemerom D a malým priemerom d , platia pre odporový moment zotrvačnosti a prierezový modul v krútení nasledovné vzťahy

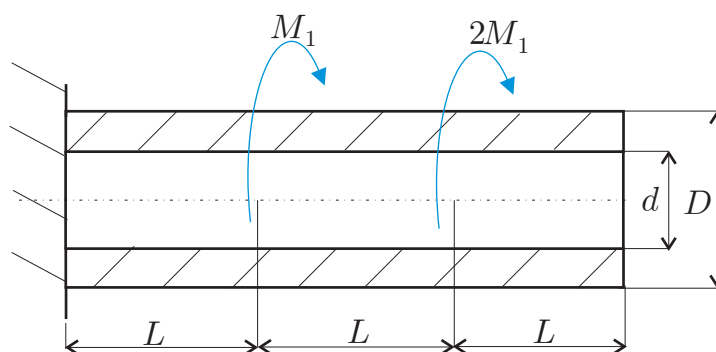
$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) \quad (7.4)$$

$$W_k = \frac{\pi D^3}{16} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) \quad (7.5)$$

Pre iné typy prierezov možno tieto charakteristiky nájsť v tabuľká a príručkách.

7.2 Riešené príklady

Príklad 32 Navrhnete priemer D medzikruhového prierezu hriadel'a elektromotora, ktorý je zat'ažený podľa obrázka 7.2. Hodnota $M_1 = 1000 \text{ Nm}$, pomer $d/D = 0,8$ a dovolené napätie $\sigma_D = 170 \text{ MPa}$.



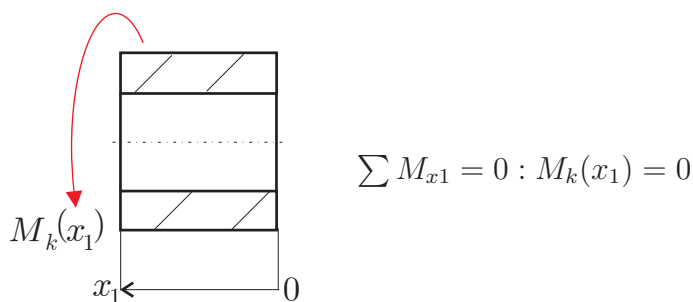
Obrázok 7.2: Príklad 32 - zadanie

Riešenie:

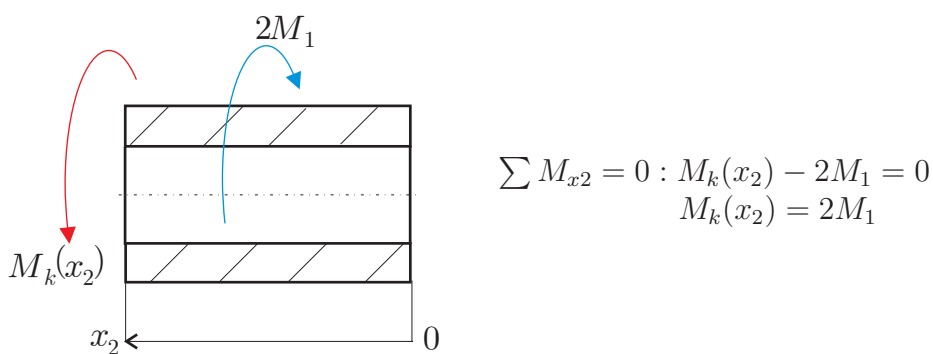
1. Určenie maximálneho krútiaceho momentu $M_{k\max}$.

Na určenie maximálneho krútiaceho momentu $M_{k\max}$ použijeme metódu mysleného rezu. Celú oblasť vzhľadom na nespojitosť zat'aženia musíme rozdeliť na tri úseky.

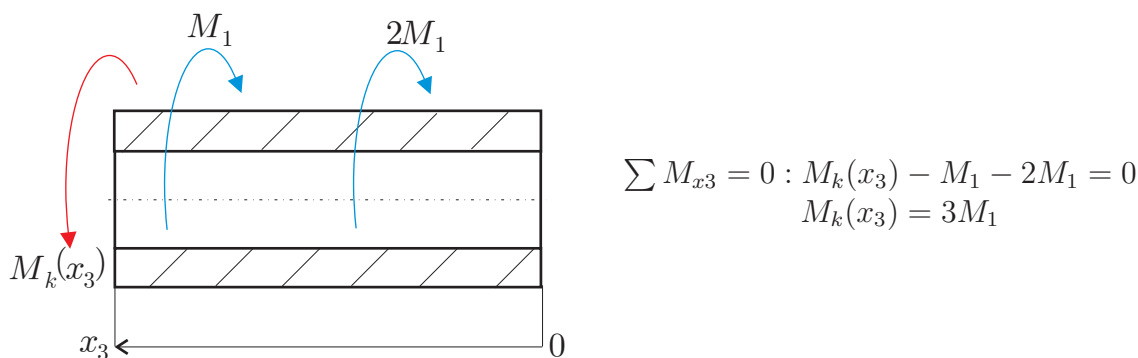
- Prvý úsek $x_1 \in (0, L)$:



- Druhý úsek $x_2 \in \langle L, 2L \rangle$:



- Tretí úsek $x_3 \in \langle 2L, 3L \rangle$:



- Priebeh vnútorného krútiaceho momentu.

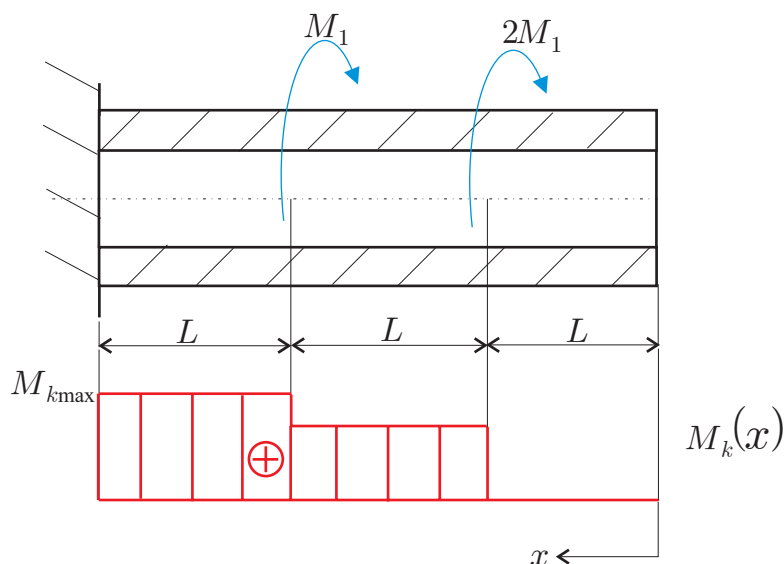
Spojením predchádzajúcich troch úsekov dostávame celkový priebeh krútiaceho momentu po celej dĺžke nosníka. Tento priebeh je znázornený na obrázku 7.3.

Ako je vidno z obrázku 7.3, maximálny krútiaci moment je v tretom úseku a jeho veľkosť je $M_{k\max} = 3M_1 = 3000 \text{ Nm}$.

2. Navrhnutie prierezu.

Pri návrhu prierezu vychádzame zo vzťahu 7.2, pričom za W_k dosadíme vzťah 7.5. Potom pre priemer D platí

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right)} \frac{M_{k\max}}{\tau_D}}$$



Obrázok 7.3: Príklad 32 - priebeh vnútorných momentov

Medzi dovoleným šmykovým napätím τ_D normálovým napätím σ_D platí vzťah odvodený z pevnostných hypotéz

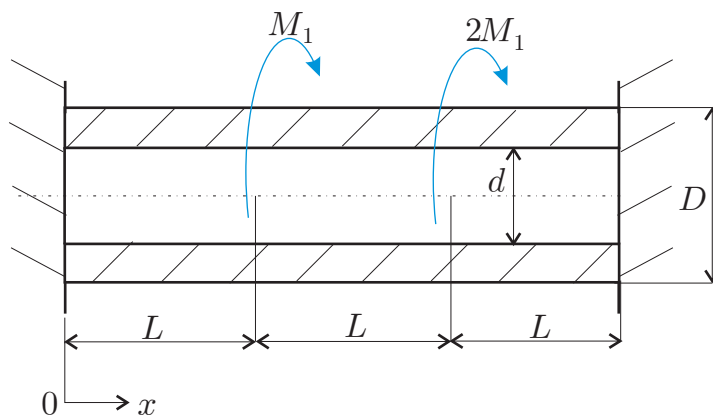
$$\sigma_D = \sqrt{3} \cdot \tau_D \doteq 0,6\tau_D$$

Dosadením zadaných parametrov úlohy máme

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16\sqrt{3}}{\pi(1-(0,8)^4)} \frac{3000}{170 \times 10^6}} = 0,0641 \text{ m}$$

Priemer D musíme zvoliť väčší ako 64,1 mm, aby maximálne napätie, ktoré je v mieste maximálneho krútiaceho momentu neprekročilo dovolené šmykové napätie. Potom $d = 0,8D = 51,3 \text{ mm}$.

Príklad 33 Navrhnete priemer hriadel'a točivého stroja, ktorý je zat'ažený podľa obrázka 7.4. Nakreslite priebehy vnútorných krútiacich momentov. Parametre M_1 , d/D a σ_D sú také isté ako v príklade 32.



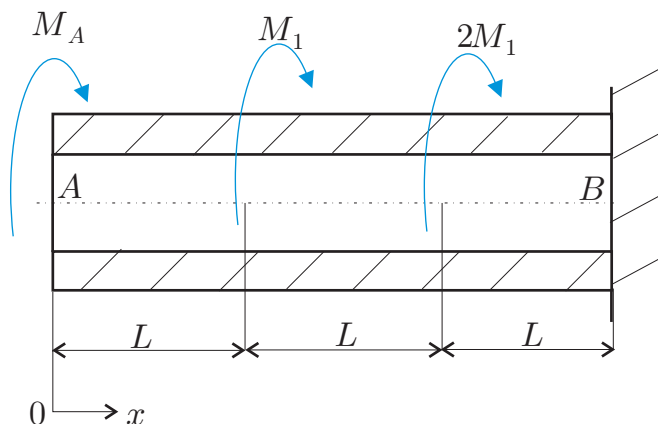
Obrázok 7.4: Príklad 33 - zadanie

Riešenie:

Úloha je jedenkrát staticky neurčitá. Neznámy krútiaci moment v jednej z väzieb určíme z deformačnej podmienky: celkový uhol skrútenia prierezu vo väzbe je rovný nule.

1. Deformačná podmienka.

Keďže sa jedná o staticky neurčitú úlohu, nedokážeme určiť priebehy vnútorných krútiacich momentov po celej dĺžke hriadeľ a bez dodatočnej podmienky. Touto podmienkou je tzv. deformačná podmienka. Jednu z väzieb odstránime a nahradíme ju väzbovou reakciou, ktorej veľkosť síce nepoznáme, ale vieme, že musí byť taká veľká, aby celkový uhol skrútenia medzi oboma krajnými prierezmi A a B bol nulový - obrázok 7.5.



Obrázok 7.5: Príklad 33 - odstránenie prebytočnej väzby

Teda deformačná podmienka je

$$\varphi_{AB} = 0 = \int_{(L_{AB})} \frac{M_k(x)}{GJ_p(x)} dx$$

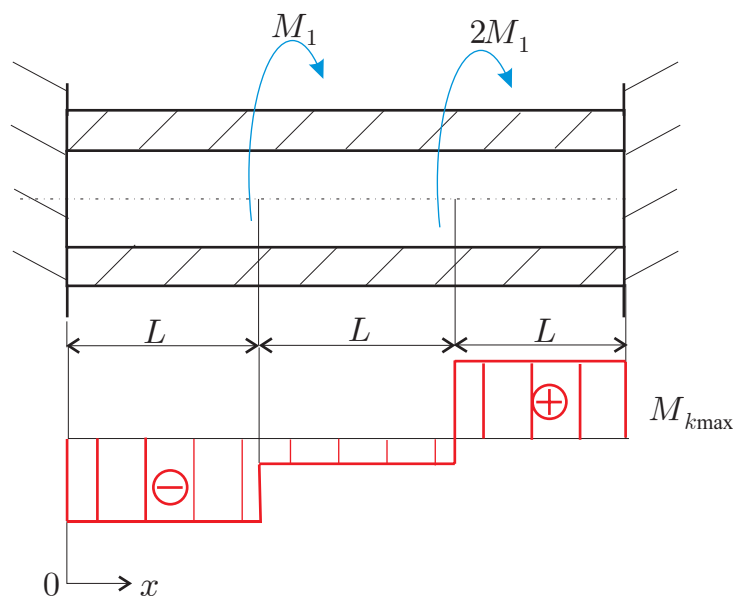
Na určenie väzbového momentu M_A musíme určiť priebehy $M_k(x)$ v troch úsekoch.

- Prvý úsek $x_1 \in \langle 0, L \rangle$:
 $\sum M_{x1} = 0 : M_k(x_1) - M_A = 0 \Rightarrow M_k(x_1) = M_A$
- Druhý úsek $x_2 \in \langle L, 2L \rangle$:
 $\sum M_{x2} = 0 : M_k(x_2) - M_A - M_1 = 0 \Rightarrow M_k(x_2) = M_A + M_1$
- Tretí úsek $x_3 \in \langle 2L, 3L \rangle$:
 $\sum M_{x3} = 0 : M_k(x_3) - M_A - M_1 - 2M_1 = 0 \Rightarrow M_k(x_3) = M_A + 3M_1$

Po dosadení dostávame deformačnú podmienku

$$\begin{aligned} \varphi_{AB} = 0 &= \int_0^L \frac{M_k(x_1)}{GJ_p} dx_1 + \int_L^{2L} \frac{M_k(x_2)}{GJ_p} dx_2 + \int_{2L}^{3L} \frac{M_k(x_3)}{GJ_p} dx_3 \\ &= 0 = M_A L + (M_A + M_1)L + (M_A + 3M_1)L \end{aligned}$$

Väzbový moment $M_A = -\frac{4}{3}M_1$.



Obrázok 7.6: Príklad 33 - priebeh vnútorných krútiacich momentov

2. Určenie maximálneho krútiaceho momentu.

Priebehy jednotlivých $M_k(x)$ sme určili v predchádzajúcom kroku, takže nám stačí dosadiť vypočítanú hodnotu za M_A .

$$M_k(x_1) = -\frac{4}{3}M_1$$

$$M_k(x_2) = -\frac{1}{3}M_1$$

$$M_k(x_3) = \frac{5}{3}M_1 = M_{k\max}$$

Priebeh vnútorných krútiacich momentov je znázornený na obrázku 7.6.

3. Navrhnutie prierezu.

Pre prierez musí platiť rovnaká podmienka ako v predchádzajúcom príklade

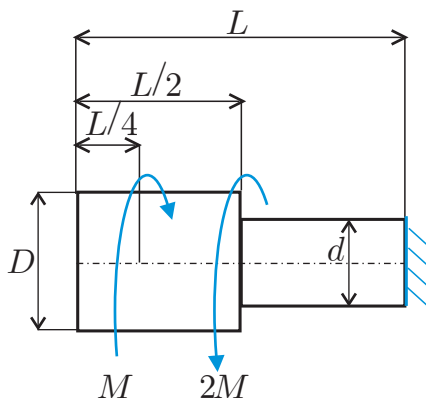
$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right)} \frac{M_{k\max}}{\tau_D}}$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16\sqrt{3}}{\pi (1 - (0,8)^4)} \frac{\frac{5}{3}1000}{170 \times 10^6}} = 0,0527 \text{ m}$$

Priemer D musíme zvoliť väčší ako 52,7 mm, aby maximálne napätie, ktoré je v mieste maximálneho krútiaceho momentu neprekročilo dovolené šmykové napätie. Z porovnania so staticky určitou úlohou vidieť, že staticky neurčité uloženie vystužuje danú mechanickú sústavu.

7.3 Neriešené príklady

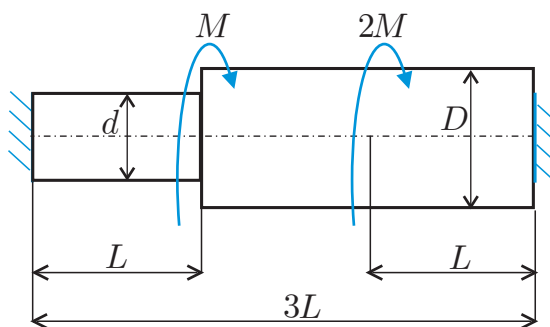
Príklad 34 Navrhnite priemer d hriadel'a na obrázku 7.7 tak, aby šmykové napätie neprekročilo τ_D . Pomer $D/d = 2$. Nakreslite priebeh vnútorného krútiaceho momentu. Veľkosť momentu M je daná.



Obrázok 7.7: Príklad 34 - zadanie

Príklad 35 Ako sa zmení hodnota hľadaného priemeru d ako aj priebeh vnútorného krútiaceho momentu z príkladu 34, ak by vonkajší moment $2M$ pôsobil v tom istom smere ako moment M ?

Príklad 36 Nakreslite priebeh vnútorného krútiaceho momentu a určite priemer d tak, aby šmykové napätie neprekročilo dovolenú hodnotu τ_D . Pomer $d/D = \sqrt{0,7}$. Zat'aženie hriadel'a je zobrazené na obrázku 7.8. Veľkosť momentu M je daná.



Obrázok 7.8: Príklad 36 - zadanie

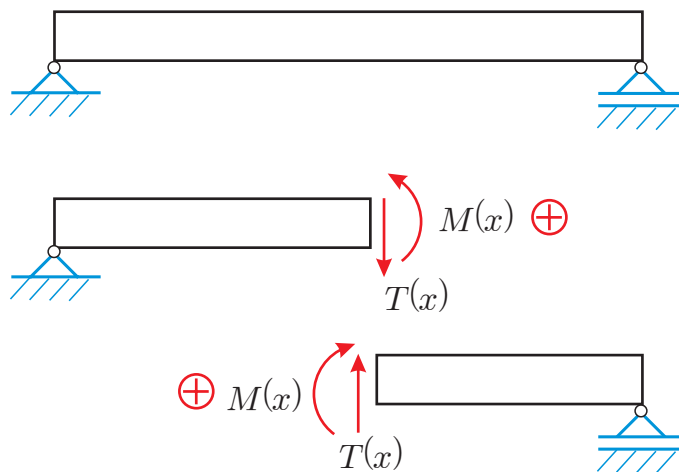
Kapitola 8

Rovinný ohyb priamych nosníkov

8.1 Ohybový moment a priečna sila

Podobne ako pri čistom ťahu alebo krute, aj pri ohybe sa pri dimenzovaní alebo kontrole vychádza z najviac namáhaného prierezu - t.j. musíme poznať priebehy vnútorných silových veličín. Pri namáhaní ohybom sú to vnútorný ohybový moment $M(x)$ a vnútorná priečna sila $T(x)$. Určujeme ich metódou myšleného rezu, t.j. v mieste rezu píšeme statické podmienky rovnováhy pre ohybový moment a priečnu silu. Platí znamienková dohoda:

- ohybový moment v ľubovoľnom reze považujeme za kladný, ak horné vlákna sú namáhané tlakom a spodné ťahom, v opačnom prípade budeme hovoriť o zápornom ohybovom momente
- priečnu silu považujeme za kladnú, ak má orientáciu zhodnú s obrázkom 8.1.



Obrázok 8.1: Kladné momenty a priečne sily - znamienkova konvencia

8.2 Normálové a šmykové napätia

Od ohybového momentu $M(x)$ je nosník namáhaný normálovým napätím $\sigma(x, y)$ a od priečnej sily $T(x)$ je namáhaný šmykovým napätím $\tau(x, y)$.

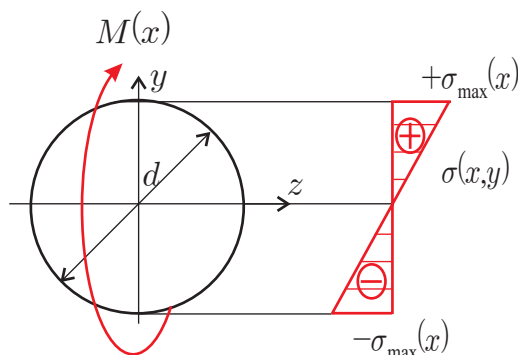
Pre ťahové napätie platí vzťah

$$\sigma(x, y) = \frac{M(x)}{J_z(x)} y \quad (8.1)$$

$J_z(x)$ je moment zotrvačnosti prierezu okolo osi z .

y je výška od osi z , v ktorej určujeme napätia.

Priebeh normálových napätí po priereze kruhového nosníka je znázornený na obrázku 8.2.



Obrázok 8.2: Priebeh normálových napätí

Keďže nás spravidla v danom reze x zaujímajú maximálne napätia, ktoré sa nachádzajú na najväčšom polomere - $y = \pm d/2$ (obrázok 8.2), môžeme písať

$$\sigma_{\max}(x) = \frac{M(x)}{J_z(x)} \frac{d}{2} = \frac{M(x)}{W_o(x)} \quad (8.2)$$

$W_o(x)$ sa nazýva prierezový modul v ohybe.

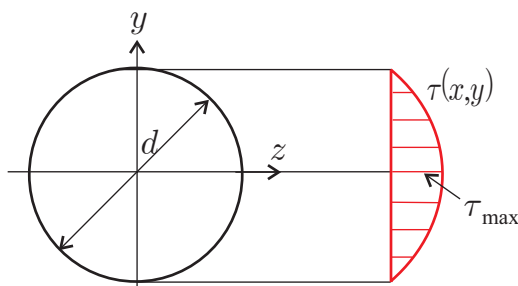
Pri dimenzovaní alebo kontrole sa musí nájsť maximálna hodnota $\sigma_{\max}(x)$ po dĺžke nosníka, pričom musí platiť

$$(\sigma_{\max}(x))_{\max} = \left(\frac{M(x)}{W_o(x)} \right)_{\max} \leq \sigma_D \quad (8.3)$$

Pri kruhovom priereze priebeh šmykových napätí po priereze je popísaný vzťahom

$$\tau(x, y) = \frac{4T(x)}{3(d/2)^2} \left[1 - \left(\frac{y}{d/2} \right)^2 \right] \quad (8.4)$$

a je znázornený na obrázku 8.3.



Obrázok 8.3: Priebeh šmykových napätí

Maximálne šmykové napätia kruhového prierezu sú na nulovej osi ($y = 0$), pričom

$$\tau_{\max}(x) = \frac{4}{3} \frac{T(x)}{S} \quad (8.5)$$

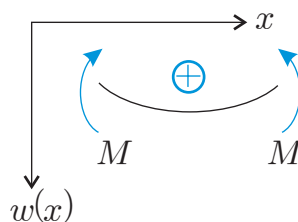
Kde S je prierezová plocha.

Vplyv šmykových napätí pri rovinnom ohybe nosníka možno spravidla zanedbať a takéto nosníky sú dimenzované len z normálových napätí od ohybu. Pri lomených a zakrivených nosníkoch ako i rámoch treba brať do úvahy aj normálové napätia od osových síl.

8.3 Deformácia priamych nosníkov

Pri deformácii priamych nosníkov nás v zásade zaujímajú dve veci:

1. Celková deformácia - t.j. celá priehybová čiara nosníka.



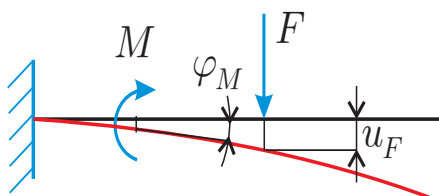
Obrázok 8.4: Deformácia nosníkov - priehybová čiara

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{EJ_z(x)} \quad (8.6)$$

Priehybová čiara je definovaná vzťahom 8.6 - t.j. diferenciálnou rovnicou druhého rádu s potrebnými okrajovými podmienkami.

2. Deformácia iba v niektorom špecifickom bode.

Tu sa používa tzv. Castiglianova metóda, ktorá určuje v konkrétnom bode buď prieťah alebo uhol natočenia prierezu. V určovanom mieste musí pritom pôsobiť vonkajšia sila (skutočná alebo fiktívna) pri určovaní prieťahu a vonkajší ohybový moment (skutočný alebo fiktívny) pri určovaní uhla natočenia prierezu.



Obrázok 8.5: Deformácia nosníkov - Castiglianova metóda

Priehyb resp. uhol natočenia sa pri tejto metóde počítajú podľa nasledujúcich vzťahov (I. Castiglianova veta)

$$u_F = \frac{\partial A}{\partial F} \quad (8.7)$$

$$\varphi_M = \frac{\partial A}{\partial M} \quad (8.8)$$

pričom A je energia napätosti od ohybového momentu (vplyv priečných síl sa zanedbáva) a jej diferenciál má tvar

$$dA = \frac{M^2(x)}{2EJ_z(x)} dx \quad (8.9)$$

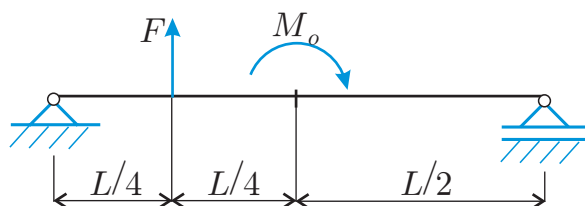
Po dosadení rovnice (8.9) do (8.7) resp. (8.8) dostávame výrazy pre prizmatický nosník (nosník konštantného prierezu)

$$u_F = \frac{1}{EJ_z} \int_{(l)} M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial F} dx \quad (8.10)$$

$$\varphi_M = \frac{1}{EJ_z} \int_{(l)} M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial M} dx \quad (8.11)$$

8.4 Riešené príklady

Príklad 37 Navrhnete kruhový prierez nosníka, ktorý je zobrazený na obrázku 8.6, pričom vplyv šmykových napätí zanedbajte. Nakreslite priebeh vnútorných priečných síl aj momentov. Zadané parametre sú $M_o = 10^3 \text{ Nm}$, $F = 10^3 \text{ N}$, $L = 2 \text{ m}$ a $\sigma_D = 100 \text{ MPa}$.



Obrázok 8.6: Príklad 37 - zadanie

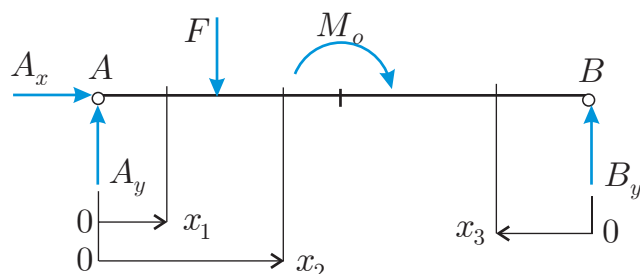
Riešenie:

1. Výpočet reakcií.

Na obrázku 8.7 sú znázornené väzbové reakcie, ktorými sme nahradili väzby.

Statické podmienky rovnováhy

$$\begin{aligned} \sum H &= 0 : A_x = 0 \\ \sum V &= 0 : A_y + B_y - F = 0 \\ \sum M_A &= 0 : B_y L - M_o - FL/4 = 0 \end{aligned}$$



Obrázok 8.7: Príklad 37 - väzbové reakcie

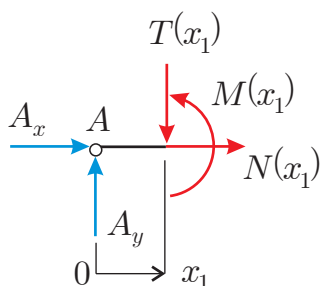
Riešením tohto systému dostávame

$$\begin{aligned} A_x &= 0 \\ A_y &= \frac{3}{4}F - \frac{M_o}{L} = 250 \text{ N} \\ B_y &= \frac{1}{4}F + \frac{M_o}{L} = 750 \text{ N} \end{aligned}$$

2. Priebeh vnútorných síl a ohybových momentov.

Vnútorné silové veličiny určíme metódou myslenného rezu. Na popis týchto veličín musíme urobiť tri myslenné rezy - obrázok 8.7.

- Prvý úsek $x_1 \in \langle 0, L/4 \rangle$:

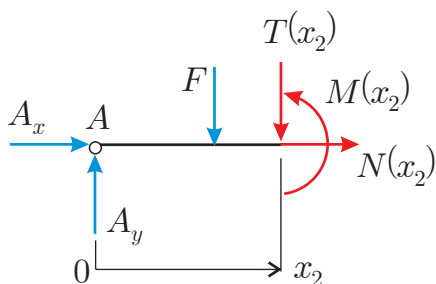


$$\begin{aligned} \sum H &= 0 : N(x_1) = 0 \\ \sum V &= 0 : T(x_1) - A_y = 0 \\ \sum M_{x_1} &= 0 : M(x_1) - A_y x_1 = 0 \end{aligned}$$

vnútorné veličiny

$$\begin{aligned} N(x_1) &= 0 \\ T(x_1) &= A_y = 250 \text{ N} \\ M(x_1) &= A_y x_1 = 250 x_1 \text{ Nm} \end{aligned}$$

- Druhý úsek $x_2 \in \langle L/4, L/2 \rangle$:

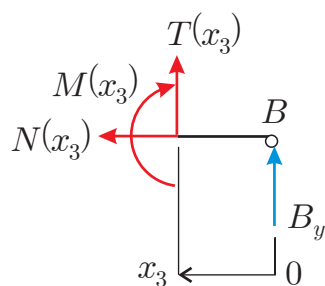


$$\begin{aligned} \sum H &= 0 : N(x_2) = 0 \\ \sum V &= 0 : T(x_2) - A_y + F = 0 \\ \sum M_{x_2} &= 0 : M(x_2) - A_y x_2 + F(x_2 - L/4) = 0 \end{aligned}$$

vnútorné veličiny

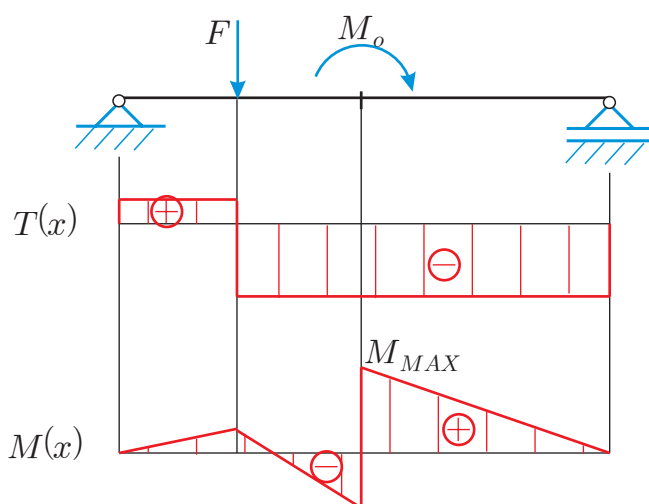
$$\begin{aligned} N(x_2) &= 0 \\ T(x_2) &= A_y - F = -750 \text{ N} \\ M(x_2) &= A_y x_2 - F(x_2 - L/4) = 500 - 750 x_2 \text{ Nm} \end{aligned}$$

- Tretí úsek $x_3 \in \langle 0, L/2 \rangle$ - tento úsek má počiatok v uzle B:



$$\begin{aligned}\sum H = 0 : N(x_3) &= 0 \\ \sum V = 0 : T(x_3) + B_y &= 0 \\ \sum M_{x_3} = 0 : M(x_3) - B_y x_3 &= 0 \\ \text{vnútorné veličiny} \\ N(x_3) &= 0 \\ T(x_3) &= -B_y = -750 \text{ N} \\ M(x_3) &= B_y x_3 = 750 x_3 \text{ Nm}\end{aligned}$$

Spojením predchádzajúcich troch úsekov dostávame celkový priebeh vnútorných veličín, ktorý je znázornený na obrázku 8.8.



Obrázok 8.8: Príklad 37 - priebehy vnútorných veličín

3. Dimenzovanie.

Maximálny ohybový moment je $M_{MAX} = 750 \text{ Nm}$. Pre prierezový modul v ohybe W_o musí platiť

$$W_o \geq \frac{M_{MAX}}{\sigma_D} = \frac{750 \text{ Nm}}{100 \text{ MPa}} = 7,5 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Pre kruhový prierez potom dostávame

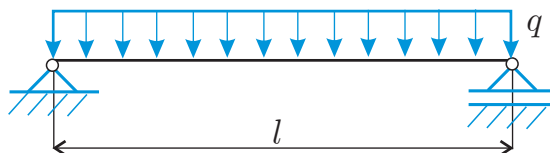
$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32W_o}{\pi}} = 42,4 \text{ mm}$$

Príklad 38 Určite priebehovú čiaru nosníka podľa obrázka 8.9. Kvadratický prierezový moment je J_z .

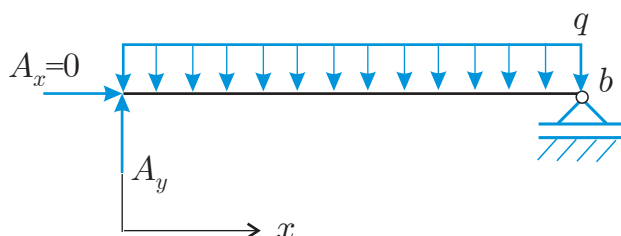
Riešenie:

- Určenie priebehu vnútorných momentov $M(x)$.

Na určenie priebehu $M(x)$ nemusíme vypočítavať obe reakcie, ale stačí nám jedna - obrázok 8.10.



Obrázok 8.9: Príklad 38 - zadanie



Obrázok 8.10: Príklad 38 - reakcia A

$$\sum M_{bi} = 0 : ql \frac{l}{2} - A_y l = 0 \Rightarrow A_y = \frac{1}{2}ql$$

Pre vnútorný moment $M(x)$ môžeme písať

$$M(x) = A_y x - qx \frac{x}{2} = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2$$

- Výpočet priehybovej čiary.

Priehybová čiara je definovaná vzt'ahom (8.6) a spolu s okrajovými podmienkami dostávame

$$\begin{aligned} w''(x) &= -\frac{M(x)}{EJ_z(x)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{EJ_z} q (lx - x^2) \\ x = 0 &\longrightarrow w(0) = 0 \\ x = l &\longrightarrow w(l) = 0 \end{aligned}$$

Prvou integráciou dostávame

$$\begin{aligned} w'(x) &= \varphi(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{EJ_z} q \left[\int lxdx - \int x^2 dx \right] + c_1 = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{EJ_z} q \left[\frac{1}{2}lx^2 - \frac{1}{3}x^3 \right] + c_1 \end{aligned}$$

Druhou integráciou dostávame

$$\begin{aligned} w(x) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{EJ_z} q \left[\int \frac{1}{2}lx^2 dx - \int \frac{1}{3}x^3 dx \right] + c_1 x + c_2 = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{EJ_z} q \left[\frac{1}{6}lx^3 - \frac{1}{12}x^4 \right] + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

kde c_1 a c_2 sú integračné konštanty a určíme ich pomocou okrajových podmienok.

$$x = 0 \longrightarrow w(0) = 0 = c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

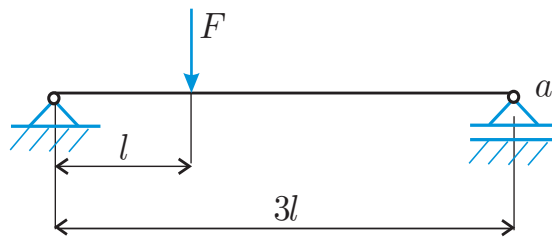
$$x = l \longrightarrow w(l) = 0 = -\frac{1}{24} \frac{1}{EJ_z} ql^4 + c_1 l \Rightarrow c_1 = \frac{1}{24} \frac{1}{EJ_z} ql^3$$

A teda celá prieťahová čiara je popísaná funkciou

$$w(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{EJ_z} q \left[\frac{1}{6} lx^3 - \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{12} l^3 x \right]$$

$$\text{Maximálny prieťah } w_{\max} = w(x = l/2) = \frac{5}{24} \frac{1}{16} \frac{ql^4}{EJ_z}.$$

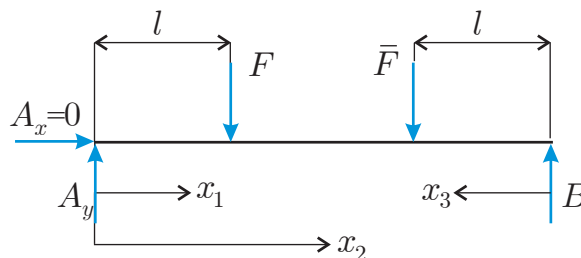
Príklad 39 Určite prieťah hriadel'a elektrického točitého stroja vo vzdialenosti l od väzby a podľa obrázku 8.11 Kvadratický prierezový moment je J_z .



Obrázok 8.11: Príklad 39- zadanie

Riešenie:

- Vloženie fiktívnej sily $\bar{F} = 0$ do miesta, kde chceme určiť prieťah, výpočet reakcií a priebehu $M(x)$.



Statické podmienky rovnováhy:

$$\sum H = 0 : A_x = 0$$

$$\sum V = 0 : A_y + B - F - \bar{F} = 0 \Rightarrow B = F + \bar{F} - A_y = \frac{1}{3} (F + 2\bar{F})$$

$$\sum M_a = 0 : A_y 3l - F 2l - \bar{F} l = 0 \Rightarrow A_y = \frac{1}{3} (2F + \bar{F})$$

Momenty pre jednotlivé úseky $x_1 \in \langle 0, l \rangle$, $x_2 \in \langle l, 2l \rangle$ a $x_3 \in \langle 0, l \rangle$:

$$M(x_1) = A_y x_1 = \frac{1}{3} (2F + \bar{F}) x_1$$

$$M(x_2) = A_y x_2 - F(x_2 - l) = Fl + \frac{1}{3}(-F + \bar{F})x_2$$

$$M(x_3) = Bx_3 = \frac{1}{3} (F + 2\bar{F}) x_3$$

Určenie priebyhu vo vzdialenosti l od väzby a . podľa Castigliana - vzťah 8.10

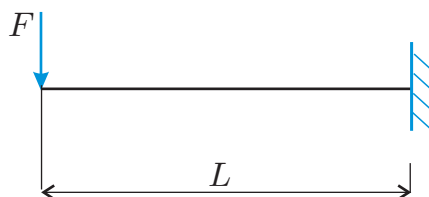
$$\begin{aligned} u_{\bar{F}} &= \frac{1}{EJ_z} \left[\int_0^l M(x_1) \frac{\partial M(x_1)}{\partial \bar{F}} dx_1 + \int_l^{2l} M(x_2) \frac{\partial M(x_2)}{\partial \bar{F}} dx_2 + \int_0^l M(x_3) \frac{\partial M(x_3)}{\partial \bar{F}} dx_3 \right] = \\ &= \frac{1}{EJ_z} \left[\int_0^l \frac{1}{3} (2F + \bar{F}) x_1 \frac{1}{3} x_1 dx_1 + \int_l^{2l} \left(Fl + \frac{1}{3}(-F + \bar{F})x_2 \right) \frac{1}{3} x_2 dx_2 + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^l \frac{1}{3} (F + 2\bar{F}) x_3 \frac{2}{3} x_3 dx_3 \right] \end{aligned}$$

Pred integráciou položíme $\bar{F} = 0$

$$\begin{aligned} u_{\bar{F}} &= \frac{1}{EJ_z} \left[\int_0^l \frac{2}{9} F x_1^2 dx_1 + \int_l^{2l} \frac{1}{3} Fl x_2 dx_2 - \int_l^{2l} \frac{1}{9} F x_2^2 dx_2 + \int_0^l \frac{2}{9} F x_3^2 dx_3 \right] = \\ &= \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{2}{27} Fl^3 + \frac{2}{3} Fl^3 - \frac{8}{27} Fl^3 + \frac{2}{27} Fl^3 \right] = \\ &= \frac{14}{27} \frac{1}{EJ_z} Fl^3 \end{aligned}$$

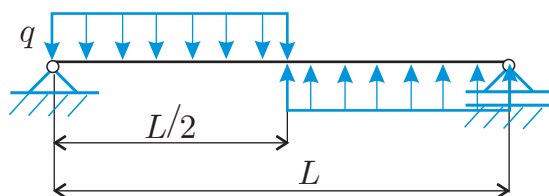
8.5 Neriešené príklady

Príklad 40 Nakreslite priebeh vnútorných síl a momentov pre nosník na obrázku 8.12. Podľa I. Castiglianovej vety určite priebyh v mieste pôsobenia sily F .



Obrázok 8.12: Príklad 40 - zadanie

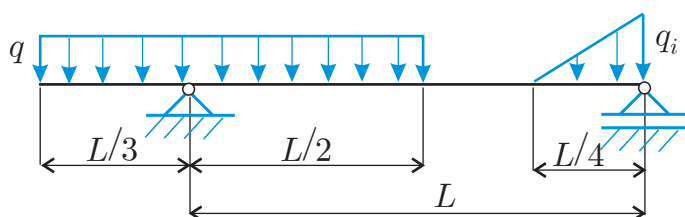
Príklad 41 Nakreslite priebeh vnútorných síl a momentov pre nosník na obrázku 8.13.



Obrázok 8.13: Príklad 41 - zadanie

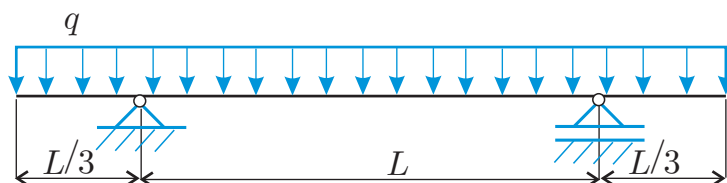
Príklad 42 Navrhnite medzikruhový prierez nosníka zobrazeného na obrázku 8.12, ak sila $F = 2000 \text{ N}$, dĺžka $L = 1 \text{ m}$, $D/d = 2$ a $\sigma_D = 120 \text{ MPa}$.

Príklad 43 Navrhnite kruhový prierez nosníka, ktorý je zobrazený na obrázku 8.14, pričom vplyv šmykových napätí zanedbajte. Nakreslite priebeh vnútorných priečných síl aj momentov. Zadané parametre sú $q = 500 \text{ N/m}$, $q_i = 200 \text{ N/m}$, $L = 0,5 \text{ m}$ a $\sigma_D = 100 \text{ MPa}$.



Obrázok 8.14: Príklad 43 - zadanie

Príklad 44 Navrhnite štvorcový prierez nosníka, ktorý je zobrazený na obrázku 8.15, pričom vplyv šmykových napätí zanedbajte. Nakreslite priebeh vnútorných priečných síl aj momentov. Zadané parametre sú $q = 500 \text{ N/m}$, $L = 0,5 \text{ m}$ a $\sigma_D = 100 \text{ MPa}$.



Obrázok 8.15: Príklad 44 - zadanie

Čast' II

Termodynamika

Kapitola 9

Stavová rovnica ideálneho plynu a zmesi ideálnych plynov

9.1 Stavové veličiny plynu

Stavové veličiny rozdel'ujeme na:

- základné
- energetické
- odvodené

9.1.1 Základné stavové veličiny

Medzi základné stavové veličiny patria:

- špecifický objem v

$$v = \frac{V}{m} [\text{m}^3/\text{kg}] \quad (9.1)$$

- tlak p

$$p = \frac{F}{S} [\text{N}/\text{m}^2] \quad (9.2)$$

- teplota t [°C], T [°K]
- veličiny určujúce zloženie systému

9.1.2 Energetické veličiny

Určujú energetický stav systému. Medzi tieto veličiny patria:

- vnútorná energia U, u
- entalpia I, i
- exergia E_x, e_x
- anergia B, b
- vol'ná energia F, f
- vol'ná entalpia G, g

9.1.3 Odvođené veličiny

Medzi odvođené veličiny zahrňame veličiny, ktoré získavame z predošlých skupín a určujú špecifické vlastnosti systémov. Patria sem: špecifická tepelná kapacita, teplotový súčiniteľ objemovej roztlačnosti, viskozita, tepelná vodivosť, atď..

9.2 Procesové veličiny

Svojou absolútnou hodnotou určujú množstvo energie prenesenej zo systému do okolia alebo medzi rozličnými systémami vo forme práce. Táto práca môže byť makroskopická - nazývame ju *práca*, alebo mikroskopická - nazývame ju *teplo*.

Práca A [J], a [J/kg] - je spojená s mechanickou deformáciou. Ak systém mení svoj objem a tým koná prácu na okolí, hovoríme o objemovej práci. Práca je kladná, ak systém dodáva energiu okoliu, a záporná, ak z okolia energia prechádza do systému.

Teplo Q [J], q [J/kg] - tu je práca vykonávaná neusporiadaným pohybom jednotlivých molekúl systému. Teplo je kladné, ak energia prechádza z okolia do systému, a záporné, keď uniká zo systému do okolia.

Absolútna hodnota procesných veličín závisí od spôsobu uskutočnenia príslušného procesu.

9.3 Stavová rovnica ideálneho plynu

Stavová rovnica vyjadruje vzájomnú závislosť základných veličín. Vzhľadom na komplikovanosť správania sa reálnych plynov sa zavádza nový pojem - *ideálny plyn*.

Ideálny plyn je taký plyn, ktorý presne vyhovuje zákonom Boyle-Mariotteovmu a Gay-Lussacovmu a stavovej rovnici z nich odvodenej.

Boyle-Mariotteov zákon vyjadruje závislosť tlaku a objemu pri konštantnej teplote

$$pv = \text{konšt.}; \text{ pri } T = \text{konšt.} \quad (9.3)$$

Zákon Gay-Lussacov vyjadruje závislosť objemu a teploty pri konštantnom tlaku

$$\frac{v}{T} = \text{konšt.}; \text{ pri } p = \text{konšt.} \quad (9.4)$$

Výslednú stavovú rovnicu ideálneho plynu môžeme potom písať v tvare

$$pV = nR_M T \quad (9.5)$$

kde n je látkové množstvo (počet mólov) plynu a R_M je univerzálna plynová konštanta

$$R_M = 8314,32 \text{ [Jkmol}^{-1}\text{K}^{-1}] \quad (9.6)$$

Pre látkové množstvo platí vzťah

$$n = \frac{m}{M} \text{ [kmol]} \quad (9.7)$$

kde m je hmotnosť plynu a M je mólová hmotnosť (hmotnosť jedného mólu resp. kilomólu plynu). Jeden mól obsahuje vždy rovnaký počet častíc (molekúl) $6,02 \times 10^{23}$.

Využitím predchádzajúcich vzťahov dostávame pre stavovú rovnicu výraz

$$pV = mRT \quad (9.8)$$

kde R je plynová konštanta a je závislá od plynu

$$R = \frac{R_M}{M} \quad (9.9)$$

9.4 Zmesi plynov

Pre zmes ideálnych plynov, chemicky vzájomne nereagujúcich, platia dve vety:

- Každý plyn sa správa v zmesi tak, akoby bol v celom objeme sám a riadi sa svojou stavovou rovnicou, z ktorej možno určiť jeho parciálny tlak odpovedajúci teplote a objemu zmesi.
- Zmes plynov chemicky vzájomne nereagujúcich má vlastnosti plynu, t.j. riadi sa základnými zákonmi a možno pre ňu použiť stavovú rovnicu.

Okrem týchto dvoch viet platí aj Daltonov zákon: celkový tlak zmesi plynov sa rovná súčtu parciálnych tlakov jednotlivých zložiek v zmesi.

$$p = \sum_{i=1}^n p_i \quad (9.10)$$

Pre zmes plynu potom stavovú rovnicu (9.8) môžeme písať

$$pV = \sum_{i=1}^n p_i V = \sum_{i=1}^n V_i p = \sum_{i=1}^n m_i R_i T = mRT \quad (9.11)$$

kde p_i sú parciálne tlaky, V_i sú parciálne objemy, m_i je hmotnosť i -tej zložky a R_i je plynová konštanta i -tej zložky zmesi.

Zavádzajú sa nasledovné pojmy:

- hmotnostná koncentrácia i -tej zložky zmesi

$$x_{mi} = \frac{m_i}{m} \quad (9.12)$$

- objemová koncentrácia i -tej zložky zmesi

$$x_{Vi} = \frac{V_i}{V} \quad (9.13)$$

- molárna koncentrácia i -tej zložky zmesi

$$x_{ni} = \frac{n_i}{n} = \frac{pV_i/R_M T}{pV/R_M T} = \frac{p_i V/R_M T}{pV/R_M T} = \frac{p_i}{p} = \frac{V_i}{V} = x_{Vi} \quad (9.14)$$

- stredná mólová hmotnosť zmesi

$$M = \frac{m}{n} = \frac{\sum m_i}{\sum n_i} \quad (9.15)$$

- plynová konštanta zmesi

$$R = \frac{R_M}{M} \quad (9.16)$$

9.5 Riešené príklady

Príklad 45 V tlakovej nádobe objemu $V = 4\text{ m}^3$ sú 3 kmol kyslíka. Nádoba sa nachádza v miestnosti s teplotou 25°C . Aký tlak bude ukazovať manometer umiestnený na nádobe a aká je hmotnosť kyslíka v nádobe? Barometrický tlak je 100 kPa , $M_{\text{O}_2} = 32\text{ kg/kmol}$.

Riešenie:

Použijeme stavovú rovnicu (9.5) na určenie absolútneho tlaku v nádobe

$$p = \frac{nR_M T}{V} = \frac{3 \cdot 8314,32 \cdot 298}{4} = 1,858 \times 10^6 \text{ Pa} = 1,858 \text{ MPa}$$

Manometer bude ukazovať hodnotu pretlaku

$$p_{\text{pretlak}} = p - p_{\text{bar}} = 1,858 - 0,100 = 1,758 \text{ MPa}$$

Hmotnosť kyslíka v nádobe určíme podľa (9.7)

$$m = nM_{\text{O}_2} = 3 \cdot 32 = 96 \text{ kg}$$

Príklad 46 Zmes 5 kg O_2 a 7 kg N_2 má tlak $p = 0,3 \text{ MPa}$ a teplotu $t = 27^\circ\text{C}$. Treba určiť:

1. hmotnostné a mólové koncentrácie zložiek
2. mólovú hmotnosť zmesi
3. plynovú konštantu zmesi
4. celkový objem zmesi
5. parciálne tlaky a objemy

Riešenie:

Z tabuliek sme odčítali mólové hmotnosti jednotlivých zložiek zmesi:

kyslík: $M_{\text{O}_2} = 32 \text{ kg/kmol}$

ďusík: $M_{\text{N}_2} = 28,016 \text{ kg/kmol}$

1. Hmotnostné a mólové koncentrácie zložiek.

$$x_{m\text{O}_2} = \frac{m_{\text{O}_2}}{m} = \frac{5}{5+7} = \frac{5}{12} = 0,42$$

$$x_{m\text{N}_2} = \frac{m_{\text{N}_2}}{m} = \frac{7}{12} = 0,58$$

$$x_{n\text{O}_2} = \frac{n_{\text{O}_2}}{n} = \frac{\frac{m_{\text{O}_2}}{M_{\text{O}_2}}}{\frac{m_{\text{O}_2}}{M_{\text{O}_2}} + \frac{m_{\text{N}_2}}{M_{\text{N}_2}}} = \frac{\frac{5}{32}}{\frac{5}{32} + \frac{7}{28,016}} = 0,38$$

$$x_{n\text{N}_2} = 1 - x_{n\text{O}_2} = 1 - 0,38 = 0,62$$

2. Mólová hmotnosť zmesi.

$$M = \frac{m}{n} = \frac{\frac{m_{\text{O}_2}}{M_{\text{O}_2}} + \frac{m_{\text{N}_2}}{M_{\text{N}_2}}}{\frac{5}{32} + \frac{7}{28,016}} = \frac{12}{\frac{5}{32} + \frac{7}{28,016}} = 29,55 \text{ kg/kmol}$$

3. Plynová konštanta zmesi.

$$R = \frac{R_M}{M} = \frac{8314}{29,55} = 281,35 \text{ J/kgK}$$

4. Celkový objem zmesi.

$$pV = mRT \Rightarrow V = \frac{mRT}{p} = \frac{12 \cdot 281,35 \cdot (273,15 + 27)}{0,3 \times 10^6} = 3,38 \text{ m}^3$$

5. Parciálne tlaky a objemy.

$$p_{O_2} = x_{nO_2}p = 0,38 \cdot 0,3 = 0,114 \text{ MPa}$$

$$p_{N_2} = x_{nN_2}p = 0,62 \cdot 0,3 = 0,186 \text{ MPa}$$

$$V_{O_2} = x_{nO_2}V = 0,38 \cdot 3,38 = 1,28 \text{ m}^3$$

$$V_{N_2} = x_{nN_2}V = 0,62 \cdot 3,38 = 2,10 \text{ m}^3$$

Príklad 47 Zmes spalín z 1 kg hnedého uhlia tvorí objem: $V_{CO_2} = 0,6 \text{ m}^3$, $V_{N_2} = 2,6 \text{ m}^3$, $V_{paraH_2O} = 0,8 \text{ m}^3$ pri tlaku 0,1 MPa a teplote 400 °C. Treba určiť:

1. mólové koncentrácie

2. hmotnostné koncentrácie

3. mólovú hmotnosť spalín

4. hmotnosť spalín

5. jednotlivé parciálne tlaky

Mólové hmotnosti jednotlivých zložiek: $M_{CO_2} = 44,01 \text{ kg/kmol}$, $M_{N_2} = 28,016 \text{ kg/kmol}$, $M_{paraH_2O} = 18,016 \text{ kg/kmol}$.

Riešenie:

1. Mólové koncentrácie.

$$x_{nCO_2} = x_{VCO_2} = \frac{V_{CO_2}}{V_{CO_2} + V_{N_2} + V_{paraH_2O}} = \frac{0,6}{0,6 + 2,6 + 0,8} = 0,15$$

$$x_{nN_2} = \frac{V_{N_2}}{V} = 0,65$$

$$x_{nparaH_2O} = \frac{V_{paraH_2O}}{V} = 0,2$$

2. Hmotnostné koncentrácie.

$$\begin{aligned} x_{mCO_2} &= \frac{m_{CO_2}}{m_{CO_2} + m_{N_2} + m_{paraH_2O}} = \frac{n_{CO_2}M_{CO_2}}{n_{CO_2}M_{CO_2} + n_{N_2}M_{N_2} + n_{paraH_2O}M_{paraH_2O}} \frac{n}{n} = \\ &= \frac{x_{nCO_2}M_{CO_2}}{x_{nCO_2}M_{CO_2} + x_{nCO_2}M_{N_2} + x_{paraH_2O}M_{paraH_2O}} = \\ &= \frac{0,15 \cdot 44,01}{0,15 \cdot 44,01 + 0,65 \cdot 28,016 + 0,2 \cdot 18,016} = \\ &= 0,23 \end{aligned}$$

$$x_{mN_2} = 0,64$$

$$x_{paraH_2O} = 0,13$$

3. Mólová hmotnosť spalín.

$$\begin{aligned} M &= x_{nCO_2} M_{CO_2} + x_{nCO_2} M_{N_2} + x_{paraH_2O} M_{paraH_2O} \\ &= 28,41 \text{ kg/kmol} \end{aligned}$$

4. Hmotnosť spalín.

$$m = \frac{pV}{RT} = \frac{pVM}{R_M T} = \frac{0,1 \times 10^6 \cdot 4 \cdot 28,41}{8314 \cdot 673,15} = 2,03 \text{ kg}$$

5. Jednotlivé parciálne tlaky.

$$\begin{aligned} p_{CO_2} &= px_{nCO_2} = 0,015 \text{ MPa} \\ p_{N_2} &= px_{nN_2} = 0,065 \text{ MPa} \\ p_{paraH_2O} &= px_{nparaH_2O} = 0,02 \text{ MPa} \end{aligned}$$

9.6 Neriešené príklady

Príklad 48 V nádobe s objemom 270 litrov je pri určitej teplote a tlaku 0,02 kmol kyslíka. Vypočítajte jeho merný a molárny objem za týchto podmienok.

Príklad 49 Hmotnostný pomer CO_2 a O_2 v zmesi je 1 : 2. Tlak zmesi je 0,2 MPa a teplota 20 °C. Vypočítajte hmotnostné podiely zložiek, plynovú konštantu zmesi.

Príklad 50 Vzduch je zmesou dusíka a kyslíka s objemovým zložením 79% N_2 a 21% O_2 . Určite hmotnostné podiely N_2 a O_2 , plynovú konštantu a mólovú hmotnosť vzduchu.

Kapitola 10

Prvá veta termodynamická a základné zmeny stavu

Prvá veta termodynamická vyjadruje zákon zachovania energie pri termodynamických procesoch. Mayer túto vetu definoval nasledovne: Teplo možno meniť na prácu a naopak a tieto premeny prebiehajú podľa určitých kvantitatívnych vzťahov.

10.1 Matematické vyjadrenie prvej vety termodynamickej

Pri stacionárnych dejoch je energia systému definovaná vnútornou energiou U , resp. u . Zmenu vnútornej energie spôsobuje jednak vykonaná práca A , resp. a systémom, a odvedené teplo zo systému $-Q$, resp. $-q$ (podľa dohody z predchádzajúcej kapitoly je teplo záporné, keď uniká zo systému). Túto vetu môžeme matematicky zapísať nasledovne

$$du = dq - da \quad (10.1)$$

Vnútorná energia je pri ideálnych plynch funkciou iba teploty

$$du = c_v dT \quad (10.2)$$

$$dU = mc_v dT \quad (10.3)$$

kde c_v je špecifická tepelná kapacita pri konštantnom objeme.

Objemová práca vykonaná plynom pri zmene jeho objemu je určená vzťahom

$$da = p dv \quad (10.4)$$

$$dA = mp dv = p dV \quad (10.5)$$

Vzťah (10.1) možno prepísať na tvar

$$dq = du + da = c_v dT + p dv \quad (10.6)$$

$$dQ = dU + dA = mc_v dT + p dV \quad (10.7)$$

Pre otvorené systémy sa spravidla používa vyjadrenie prvej vety termodynamickej pomocou entalpie I , resp. i , ktorá vyjadruje energiu otvoreného systému (vnútorná energia plus energia prúdu) a je vyjadrená vzťahom

$$di = d(u + pv) = d(c_v dT + RT) = c_p dT \quad (10.8)$$

kde c_p je špecifická tepelná kapacita pri konštantnom tlaku. Potom prvá veta termodynamická má tvar

$$dq = di + da_t = c_p dT - v dp \quad (10.9)$$

$$dQ = dI + dA_t = mc_p dT - V dp \quad (10.10)$$

kde a_t resp. A_t je technická práca

$$a_t = -v dp \quad (10.11)$$

10.2 Základné zmeny stavu

- Izochorický proces.

Pri tejto zmene je objem konštantný, $v = \text{konšt.}$, $dv = 0 \Rightarrow$ objemová práca sa nekoná.

Rovnica procesu:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (10.12)$$

Prvý zákon termodynamiky:

$$dq = du \quad (10.13)$$

$$q = u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1) \quad (10.14)$$

- Izobarický proces.

Pri tejto zmene je tlak konštantný, $p = \text{konšt.}$, $dp = 0 \Rightarrow$ technická práca sa nekoná.

Rovnica procesu:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (10.15)$$

Prvý zákon termodynamiky:

$$dq = di \quad (10.16)$$

$$q = i_2 - i_1 = c_p(T_2 - T_1) \quad (10.17)$$

- Izotermický proces.

Pri tejto zmene je teplota konštantná, $T = \text{konšt.}$, $dT = 0 \Rightarrow$ vnútorná energia ani entalpia sa nemenia.

Rovnica procesu:

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 \quad (10.18)$$

Prvý zákon termodynamiky:

$$dq = pdv = -v dp \quad (10.19)$$

$$q = a_t = a = \int p dv = RT \int \frac{dv}{v} = RT \ln \frac{v_2}{v_1} = RT \ln \frac{p_1}{p_2} = p_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1} \quad (10.20)$$

- Adiabatický proces.

Tento proces prebieha v tepelne izolovaných systémoch, t.j. teplo sa do systému neprivádza ani neodvádza.

Rovnica procesu:

$$pv^{\kappa} = \text{konšt.} \quad (10.21)$$

Tento vzťah môže byť napísaný nasledovne

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa} \quad (10.22)$$

Prvý zákon termodynamiky:

$$0 = da + du \quad (10.23)$$

Odkiaľ pre objemovú prácu môžeme písať

$$\begin{aligned} a &= u_1 - u_2 = c_v (T_1 - T_2) = \frac{R}{\kappa - 1} (T_1 - T_2) = \frac{R}{\kappa - 1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) = \\ &= \frac{RT_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa-1} \right] = \frac{RT_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \end{aligned} \quad (10.24)$$

Pre technickú prácu môžeme písať

$$a_t = - \int_{p_1}^{p_2} v dp = - \int_{p_1}^{p_2} v_1 p_1^{1/\kappa} \frac{dp}{p^{1/\kappa}} = v_1 p_1 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] = \kappa a \quad (10.25)$$

- Polytropický proces.

Je to najobecnější proces, ktorý prebieha v neizolovaných termodynamických systémoch.

- Rovnica procesu:

$$pv^n = \text{konšt.} \quad (10.26)$$

n je polytropický exponent.

Teplo vymenené medzi systémom a okolím sa vypočíta podľa vzťahu

$$q = c_v \frac{\kappa - n}{1 - n} (T_2 - T_1) = c (T_2 - T_1) \quad (10.27)$$

kde c je polytropická špecifická tepelná kapacita.

Objemová práca sa určí podľa vzťahu (10.24), kde sa κ zamení za n .

10.3 Riešené príklady

Príklad 51 V uzavretom priestore je 0,6 m³ vzduchu s tlakom 0,5 MPa a teplotou 20 °C. Aká bude teplota a tlak vzduchu, ak odoberieme teplo 100 kJ. $c_v = 0,714$ kJ/kgK, $R = 288$ J/kgK.

Riešenie:

Keďže sa jedná o dej izochorický ($dV = 0$), objemová práca konaná vzduchom je nulová $A = 0$. Potom z prvého zákona termodynamiky vyplýva, že vnútorná energia systému sa zmení práve o odobraté teplo

$$Q = \Delta U = mc_v (T_2 - T_1)$$

Hmotnosť vzduchu sa určí zo stavovej rovnice ideálneho plynu - vzťah (9.8) pre počiatočný stav vzduchu

$$p_1 V = m R T_1 \Rightarrow m = \frac{p_1 V}{R T_1} = \frac{0,5 \times 10^6 \cdot 0,6}{288 \cdot 293,15} = 3,55 \text{ kg}$$

Potom pre teplotu T_2 môžeme písať

$$T_2 = T_1 + \frac{Q}{m c_v} = 293,15 - \frac{100 \times 10^3}{3,55 \cdot 714} = 253,69 \text{ °K} = -19,45 \text{ °C}$$

Pre výpočet tlaku použijeme vzťah (10.12)

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 0,5 \frac{253,69}{293,15} = 0,43 \text{ MPa}$$

Príklad 52 O koľko sa posunie piest vo valci, ak 1kg vzduchu, ktorý je uzavretý vo valci pod tlakom 0,5 MPa, dodáme teplo 100 kJ. Ohrev je pri konštantnom tlaku, priemer valca je 500 mm, počiatočná teplota je 20 °C, $c_p = 1,01 \text{ kJ/kgK}$, $R = 288 \text{ J/kgK}$.

Riešenie:

Keďže je dej uskutočňovaný pri konštantnom tlaku (izobarický proces), technická práca je rovná nule. Potom prvú vetu termodynamickú môžeme písať v upravenom tvare (10.10)

$$Q = \Delta I = m c_p \Delta T$$

odkiaľ dostávame, že rozdiel teplôt pred dejom a po vykonaní deja bude

$$\Delta T = \frac{m c_p}{Q} = \frac{1 \cdot 1,01 \times 10^3}{100 \times 10^3} = 99 \text{ °C} = 99 \text{ °K}$$

Samotné posunutie piestu určíme z rozdielu objemov pred dejom a po deji.

- Objem pred dejom.

Teplota T_1 :

$$T_1 = 273,15 + 20 = 293,15 \text{ °K}$$

Objem V_1 :

$$V_1 = \frac{m R T_1}{p} = \frac{1 \cdot 288 \cdot 293,15}{0,5 \times 10^6} = 0,168 \text{ m}^3$$

- Objem po deji.

Teplota T_2 :

$$T_2 = T_1 + \Delta T = 293,15 + 99 = 392,15 \text{ °K}$$

Objem V_2 :

$$V_2 = \frac{m R T_2}{p} = \frac{1 \cdot 288 \cdot 392,15}{0,5 \times 10^6} = 0,225 \text{ m}^3$$

- Samotné posunutie piesta.

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{\pi d^2}{4} \Delta L \Rightarrow \Delta L = \frac{(V_2 - V_1) 4}{\pi d^2}$$

$$\Delta L = \frac{0,057 \cdot 4}{\pi \cdot 0,5^2} = 0,294 \text{ m}$$

Príklad 53 Vypočítajte príkon motora odstredivého čerpadla parného kotla, ktoré zvyšuje v 140 t/h vody tlak z 0,3 MPa na 7 MPa. Účinnosť čerpadla je 75%.

Riešenie:

Vodu považujeme za kvázi nestlačiteľnú a preto tu môžeme použiť vzťahy pre izochorický dej.

Výkon čerpadla sa určí pomocou technickej práce

$$P_{\dot{c}} = \dot{m} a_t$$

kde $\dot{m}$ je prietokové množstvo.

$$\dot{m} = 140 \text{ t/h} = \frac{140 \times 10^3}{3600} = 38,89 \text{ kg/s}$$

Pre technickú prácu a_t platí vzťah (10.11)

$$a_t = - \int_{p_1}^{p_2} v dp = v (p_1 - p_2) = \frac{1}{\rho} (p_1 - p_2) = \frac{1}{1000} (0,3 \times 10^6 - 7 \times 10^6) = -6700 \text{ J/kg}$$

Opačné znamienko hovorí o tom, že prácu treba do systému dodať.

Potom výkon čerpadla je

$$P_{\dot{c}} = 38,89 \cdot (-6700) = -260563 \text{ W}$$

Príkon motora je oproti výkonu čerpadla znížený o straty

$$P_{t,m} = \frac{P_{\dot{c}}}{\eta_{\dot{c}}} = -\frac{260563}{0,75} = -347417 \text{ W} = -347,4 \text{ kW}$$

Príklad 54 Turbokompresor nasáva 129,74 m³/h vzduchu pri tlaku 0,096 MPa a teplote 20 °C, ktorý izotermicky stláča na tlak 0,34 MPa. Vypočítajte hmotnosť vzduchu dodávaného do siete za hodinu, objem po stlačení za hodinu a výkon pohonného motora, ak účinnosť kompresora je 65%. $R_{vzduch} = 288 \text{ J/kgK}$.

Riešenie:

- Hmotnosť stlačeného vzduchu za hodinu.

Pri výpočte hmotnosti stlačeného vzduchu sa vychádza zo stavovej rovnice ideálneho plynu.

$$p_1 \dot{V}_1 = \dot{m} R T_1 \Rightarrow \dot{m} = \frac{p_1 \dot{V}_1}{R T_1} = \frac{0,096 \times 10^6 \cdot 129,74/3600}{288 \cdot 293,15} = 0,0409 \text{ kg/s} = 147,52 \text{ kg/h}$$

- Objem po stlačení za hodinu.

Pre izotermický dej platí vzťah (10.18)

$$p_1 \dot{V}_1 = p_2 \dot{V}_2 \Rightarrow \dot{V}_2 = \dot{V}_1 \frac{p_1}{p_2} = 129,74 \frac{0,096}{0,34} = 36,63 \text{ m}^3/\text{h}$$

- Výkon pohonného motora.

Na výpočet výkonu kompresora použijeme vzťah (10.19)

$$P_k = \dot{A}_t = -p_1 \dot{V}_1 \ln \frac{p_2}{p_1} = -0,096 \times 10^6 \cdot 129,74/3600 \ln \frac{0,34}{0,096} = -4375 \text{ W}$$

Odkiaľ pre výkon pohonného motora dostávame

$$P_m = \frac{P_k}{\eta} = -\frac{4375}{0,65} = -6731 \text{ W}$$

Príklad 55 *Zadanie je to isté ako v príklade 54, ale dej je adiabatický $\kappa = 1,4$.*

Riešenie:

- Hmotnosť stlačeného vzduchu za hodinu - vypočíta sa tak isto ako v príklade 54.

$$p_1 \dot{V}_1 = \dot{m} R T_1 \Rightarrow \dot{m} = 147,52 \text{ kg/h}$$

- Objem po stlačení za hodinu.

Pre adiabatický dej platí vzťah (10.21)

$$p_1^{\frac{1}{\kappa}} \dot{V}_1 = p_2^{\frac{1}{\kappa}} \dot{V}_2 \Rightarrow \dot{V}_2 = \dot{V}_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = 129,74 \left(\frac{0,096}{0,34} \right)^{\frac{1}{1,4}} = 52,58 \text{ m}^3/\text{h}$$

- Výkon pohonného motora.

Na výpočet výkonu kompresora použijeme vzťah (10.25)

$$\begin{aligned} P_k &= \dot{A}_t = \dot{V}_1 p_1 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right] = \\ &= 129,74/3600 \cdot 0,096 \times 10^6 \cdot \frac{1,4}{1,4 - 1} \left[1 - \left(\frac{0,34}{0,096} \right)^{\frac{0,4}{1,4}} \right] = -5270 \text{ W} \end{aligned}$$

Odkiaľ pre výkon pohonného motora dostávame

$$P_m = \frac{P_k}{\eta} = -\frac{5270}{0,65} = -8107,7 \text{ W}$$

10.4 Neriešené príklady

Príklad 56 Aké množstvo tepla sa dodalo 6,2 kg vzduchu v uzavretom valci, ak jeho teplota stúpla z 10 na 52 °C a vykonal pritom pohyb piesta vonkajšiu prácu 185 kJ? ($c_v = 0,71 \text{ kJ/kgK}$)

Príklad 57 Aká je teplota 0,42 kg vodíka, ktorý bol skomprimovaný v uzavretom valci prácou 400 kJ, pričom sa chladením odobralo teplo 150 kJ? Teplota vodíka pred kompresiou bola 20 °C, $c_v = 10,11 \text{ kJ/kgK}$.

Príklad 58 Vo valci s priemerom 400 mm je 80 litrov vzduchu pri tlaku 0,3 MPa a teplote 15 °C. Akou silou treba pôsobiť na píst uzatvárajúci valec, aby sa píst nepohol, ak privedieme vzduchu teplo 83 kJ? ($c_v = 0,71 \text{ kJ/kgK}$)

Kapitola 11

Termodynamika pár

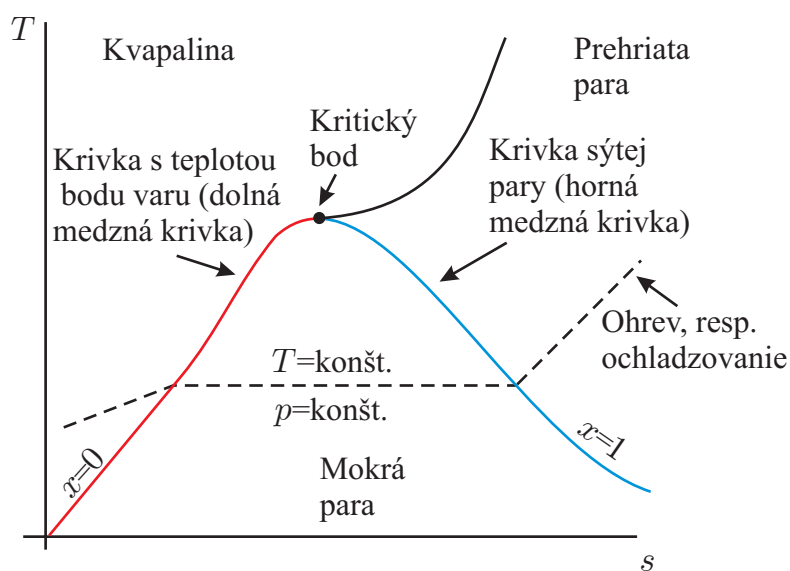
11.1 Základné pojmy

Stavy kvapaliny zohriatej na bod varu pre rozličné tlaky nazývame ľavou (dolnou) medznou krivkou ($x = 0$) alebo krivkou sýtej kvapaliny.

Sýta para je para, ktorá je pri teplote varu v termodynamickej rovnováhe so sýtou kvapalinou. Spojnicu bodov sýtej pary pre rôzne tlaky nazývame pravou (hornou) medznou krivkou ($x = 1$) alebo krivkou sýtej pary.

Mokrú para je rovnovážna zmes sýtej kvapaliny a sýtej pary - je to oblasť medzi medznými krivkami.

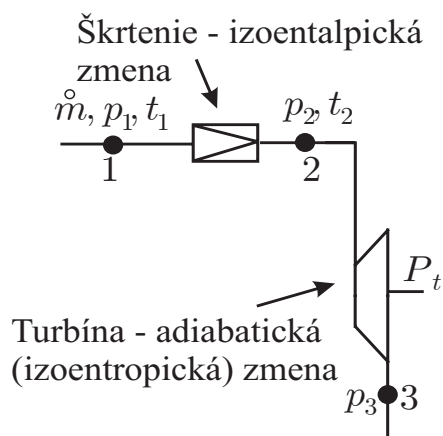
Prehriata para sa získa ohrevom sýtej pary.



Obrázok 11.1: $T - s$ diagram pary s medznými krivkami

11.2 Riešené príklady

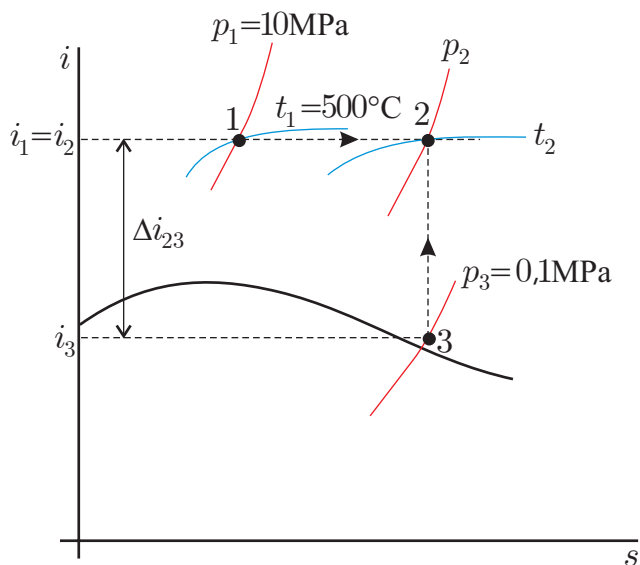
Príklad 59 Treba určiť, na aký tlak treba zoškrtiť vstupné parametre pary $\dot{m} = 0,694 \text{ kg/s}$, tlak $p_1 = 10 \text{ MPa}$ a teplotu $t_1 = 500 \text{ °C}$, ak výkon turbíny má byť 500 kW a výstupný tlak z turbíny má byť $p_3 = 0,1 \text{ MPa}$ - obrázok 11.2. Predpokladajte izoentropickú zmenu a úlohu riešte pomocou $i - s$ diagramu.



Obrázok 11.2: Príklad 59 - zadanie

Riešenie:

Pracovný bod 1 je v $i - s$ diagrame jednoznačne určený teplotou t_1 a tlakom p_1 - obrázok 11.3.



Obrázok 11.3: Príklad 59 - určenie pracovných bodov v $i - s$ diagrame

Škrtenie turbíny je izoentalpický dej ($di = 0$), ktorým sa znižujú parametre pary - tlak p a teplota t , pričom sa znižuje výkon turbíny.

Pre výkon turbíny platí vzťah

$$P_t = \dot{m} a_t = \dot{m} (i_2 - i_3) = \dot{m} \Delta i_{23} \Rightarrow \Delta i_{23} = \frac{P_t}{\dot{m}}$$

Takže pre náš výkon $P_t = 500 \text{ kW}$ a hmotnostný prietok $\dot{m} = 0,694 \text{ kg/s}$ dostávame entalpický spád

$$\Delta i_{23} = \frac{500}{0,694} = 720,46 \text{ kJ/kg}$$

Keďže škrtenie je dej izoentalpický, platí

$$i_1 = i_2$$

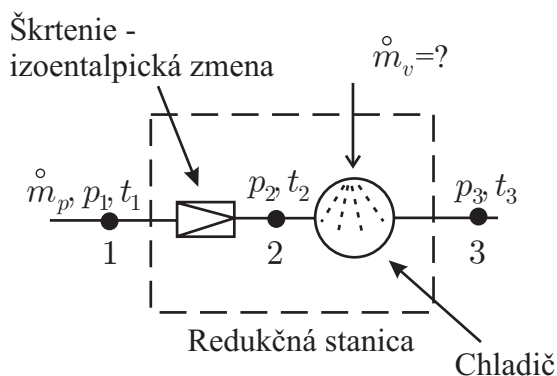
Z $i - s$ diagramu pre parametre bodu 1 - tlak $p_1 = 10$ MPa a teplotu $t_1 = 500$ °C odčítame entalpiu: $i_1 = i_2 = 3380$ kJ/kg a určíme entalpiu v bode 3

$$i_3 = i_2 - \Delta i_{23} = 3420 - 720,46 = 2699,53 \text{ kJ/kg} \doteq 2700 \text{ kJ/kg}$$

Pracovný bod 3 je už teraz jednoznačne určený tlakom na výstupe z turbíny p_3 a entalpiou na výstupe i_3 .

Keďže turbína pracuje adiabaticky, dej medzi bodmi 2 a 3 je izoentropický a škrtenie, ktoré sa nachádza medzi pracovnými bodmi 1 a 2 je izoentropický dej, potom pracovný bod 2 dostaneme v $i - s$ diagrame ako priesečník horizontálnej čiary - izoentalpa - z bodu 1 a vertikálnej čiary - izoentropa - z bodu 3. Odčítané hodnoty bodu 2, na ktoré sa majú zoškrtiť vstupné parametre pary, sú teplota $t_2 = 455$ °C a tlak $p_2 = 1,75$ MPa.

Príklad 60 Do redukčnej stanice vstupuje $\dot{m}_p = 5$ t/h pary o tlaku 1 MPa a teplote 200 °C. Na výstupe z redukčnej stanice (za chladičom) má byť tlak 0,3 MPa a teplota 150 °C. Vypočítajte potrebné množstvo vstrekovanej vody $\dot{m}_v$, ak jej teplota je $t_v = 100$ °C, $c_v = 4,2$ kJ/kgK. Použite $i - s$ diagram, v ktorom zakreslite proces 1-2 (škrtenie) a 2-3 (izobarické chladenie).



Obrázok 11.4: Príklad 60 - zadanie

Riešenie:

Redukčná stanica slúži na zníženie tlaku a teploty pary. Tlak pary sa zníži škrtením ($di = 0$) a teplota pary sa zníži izobarickým vstreknutím vody, ktorá sa premení na paru. Vstreknutá voda v chladiči sa premení na paru s rovnakými parametrami ako má para na výstupe z redukčnej stanice.

Pri určovaní potrebného množstva vody, ktoré má byť vstreknuté do chladiča budeme vychádzať z energetickej bilancie, t.j., že entalpia na výstupe sa rovná súčtu vstupujúcich entalpií do chladiča

$$\dot{m}_3 i_3 = \dot{m}_p i_2 + \dot{m}_v i_v$$

kde $\dot{m}_3$ je množstvo pary na výstupe a je rovné $\dot{m}_3 = \dot{m}_p + \dot{m}_v$.

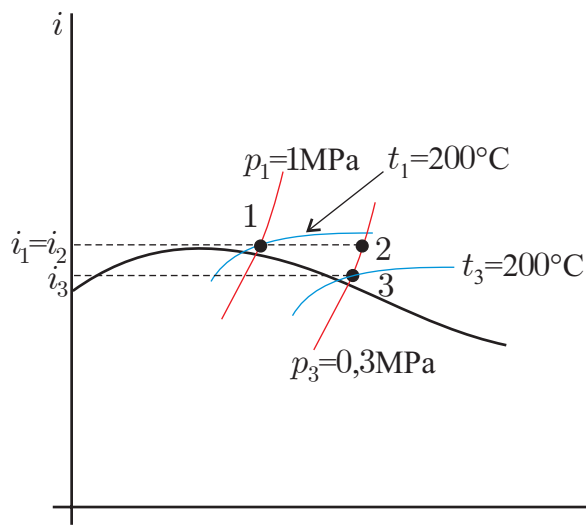
Entalpia pary na vstupe do chladiča i_2 sa rovná entalpii na vstupe do redukčnej stanice i_1 , ktorú určíme pomocou $i - s$ diagramu zo známych hodnôt p_1 a t_1 , odčítaná hodnota je $i_2 = i_1 = 2840$ kJ/kg.

Obdobne určíme aj entalpiu i_3 na výstupe z chladiča $i_3 = 2770$ kJ/kg - obrázok 11.5.

Entalpia vstrekovanej vody sa určí pomocou vzťahu $i_v = c_v t_v = 4,2 \cdot 100 = 420$ kJ/kg.

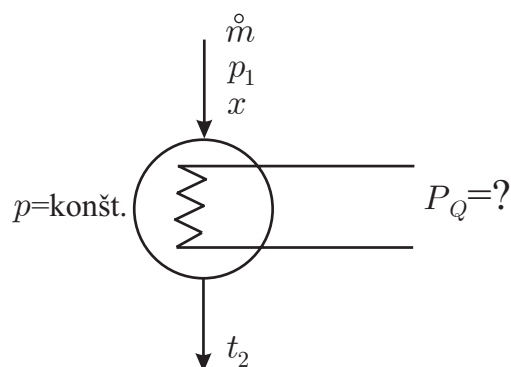
Potom pre hľadané množstvo vstrekovanej vody dostávame

$$\dot{m}_v = \dot{m}_p \frac{i_1 - i_3}{i_3 - i_v} = 5000 \frac{2840 - 2770}{2770 - 420} = 148,94 \text{ kg/h}$$



Obrázok 11.5: Príklad 60 - určenie pracovných bodov v $i - s$ diagrame

Príklad 61 Do prehrievača pary prúdi $\dot{m} = 10 \text{ kg/s}$ mokrej pary tlaku $p_1 = 1 \text{ MPa}$ a suchosti $x = 0,9$. V prehrievači sa para prehreje na $t_2 = 300 \text{ °C}$. Prehrievanie prebieha pri konštantnom tlaku. Vypočítajte potrebný tepelný výkon P_Q , ktorý je potrebný. Využite $i - s$ diagram.



Obrázok 11.6: Príklad 61 - zadanie

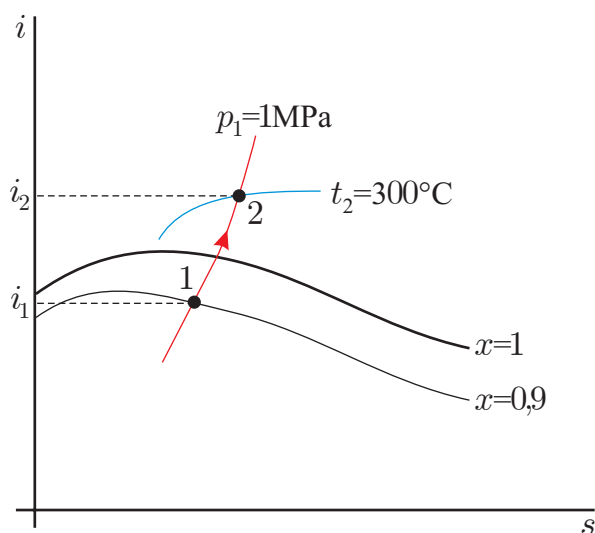
Riešenie:

Keďže tlak je pri procese konštantný, pre tepelný výkon dostávame jednoduchý vzťah

$$P_Q = \Delta \dot{I} = \dot{m} (i_2 - i_1)$$

Z $i - s$ diagramu pre vstupné parametre - tlak p_1 a suchosť x odčítame entalpiu $i_1 = 2580 \text{ kJ/kg}$ - obrázok 11.7. Entalpiu na konci deja odčítame z $i - s$ diagramu tak, že vychádzame z pracovného bodu 1 a pokračujeme po krivke konštantného tlaku (izobare) až sa pretne s izotermou s teplotou $t_2 = 300 \text{ °C}$. Ich priesečník je hľadaný pracovný bod 2 a jeho entalpia je $i_2 = 3050 \text{ kJ/kg}$. Potom hľadaný tepelný výkon má hodnotu

$$P_Q = 10 (3050 - 2580) = 4700 \text{ kW} = 4,7 \text{ MW}$$



Obrázok 11.7: Príklad 61 - určenie pracovných bodov v $i - s$ diagrame

11.3 Neriešené príklady

Príklad 62 Pri izotermickom stláčaní 1 kg prehriatej pary, ktorá má počiatkové parametre $p_1 = 0,3 \text{ MPa}$ a $t_1 = 300^\circ\text{C}$, odvádza sa 420 kJ tepla. Aký je tlak na konci stlačenia, o koľko sa zmenila vnútorná energia pary a práca potrebná na stlačenie pary? Úlohu riešte pomocou $i - s$ diagramu.

Príklad 63 V parnej turbíne výkonu 25 MW prebieha nevratná adiabatická expanzia pary. Vstupné parametre pary do turbíny sú $p_1 = 5 \text{ MPa}$, $t_1 = 400^\circ\text{C}$ a na výstupe bol nameraný tlak $p_2 = 5 \text{ kPa}$ a suchosť $x_2 = 0,85$. Zmenu kinetickej a potenciálnej energie prúdu pary neuvažujte. Určite špecifickú prácu turbíny skutočnú aj teoretickú, hmotnostný tok pary turbínou a termodynamickú účinnosť parnej turbíny.

Príklad 64 Vypočítajte, ako sa zmenší merná technická práca, ktorú vykoná vodná para v parnej turbíne, keď sa pri čiastočnom zat'azení bude izolovane škrtiť z pôvodného stavu 10 MPa, 550°C na tlak 2 MPa. Termodynamickú účinnosť expanzie uvažujte v oboch prípadoch 80 %, tlak v kondenzátore (na výstupe z turbíny) je 5 MPa.

Kapitola 12

Clausius - Rankinov obeh

12.1 Základné pojmy

Clausius - Rankinov parný obeh je porovnávací obeh pre parné elektrárenské obeh s týmito základnými zariadeniami: parný kotol, prehrievač, parná turbína, kondenzátor, kondenzátne čerpadlo, napájačka a predhrievač teplej vody (ekonomizér) - obrázok 65.

12.2 Riešené príklady

Príklad 65 V elektrárni treba nainštalovať kondenzačnú turbínu, ktorá je zapojená do základného Rankinovho obehu. Požadovaný výkon turbíny je 100 MW, vstupné parametre pary sú: 8 MPa a 500 °C, tlak v kondenzátore 4 kPa, vnútorná termodynamická účinnosť $\eta_{tdi} = 0,78$. Vypočítajte pomocou $i - s$ diagramu:

1. prietok pary turbínou
2. množstvo paliva, ktoré treba spáliť v kotli na výrobu množstva pary vypočítaného v bode 1, ak výhrevnosť paliva je $q_{pal} = 15000 \text{ kJ/kg}$ a účinnosť kotla je 84 %
3. množstvo chladiacej vody pre kondenzáciu, ak oteplenie vody v kondenzátore je 10 °K ($c_{H_2O} = 4,2 \text{ kJ/kgK}$)
4. tepelnú účinnosť obehu (termickú).

Riešenie:

1. Prietok pary turbínou.

Pre výkon turbíny platí vzťah

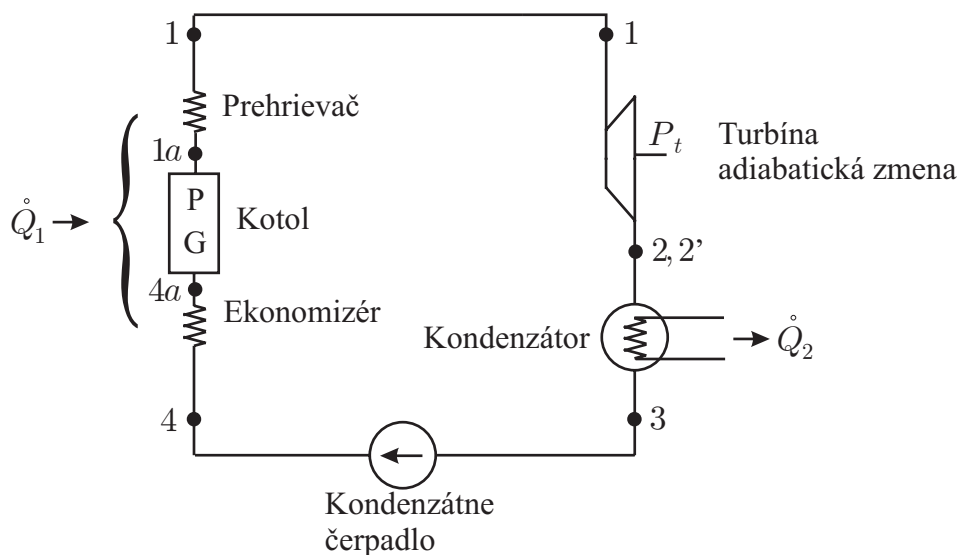
$$P_t = \dot{m}_p a_t$$

kde $\dot{m}_p$ je prietokové množstvo pary a a_t je technická práca 1 kg pary.

Keďže dej medzi bodmi 1 a 2 je adiabatická expanzia, t.j. pre ideálny dej izoentropická, potom môžeme tento vzťah prepísať nasledovne

$$P_t = \dot{m}_p (i_1 - i_2) \Rightarrow \dot{m}_p = \frac{P_t}{(i_1 - i_2)}$$

Entalpia i_1 sa určí z $i - s$ diagramu na základe parametrov v pracovnom bode 1: $p_1 = 8 \text{ MPa}$, $t_1 = 500 \text{ °C} \Rightarrow i_1 = 3400 \text{ kJ/kg}$ - obrázok 12.2



Obrázok 12.1: Príklad 65 - Clausius-Rankinov obeh

Entalpia i_2 sa určí z podmienky izotropického deja z bodu 1 do bodu 2, pričom v bode 2 je tlak rovný tlaku v kondenzátore $p_2 = 4 \text{ kPa}$, lebo kondenzácia je dej izobarický aj izotermický, $i_2 = 2020 \text{ kJ/kg}$.

Potom ideálne množstvo pary, potrebné na dosiahnutie požadovaného výkonu je

$$\dot{m}_p = \frac{100 \times 10^3}{(3400 - 2020)} = 72,46 \text{ kg/s} = 260,86 \text{ t/h}$$

V skutočnosti expanzia v turbíne neprebieha z bodu 1 do bodu 2 ale do bodu 2' - je to skutočný nevratný neizotermický dej, pričom pre vnútornú termodynamickú účinnosť turbíny platí vzťah

$$\eta_{tdi} = \frac{A_{t,skut}}{A_{t,vrat}} = \frac{i_1 - i'_2}{i_1 - i_2} \Rightarrow i'_2 = i_1 - [\eta_{tdi} (i_1 - i_2)]$$

$$i'_2 = 3400 - [0,78 (3400 - 2020)] = 2323,6 \text{ kJ/kg}$$

Potom skutočný prietok pary musí byť

$$\dot{m}_{p,skut} = \frac{P_t}{i_1 - i'_2} = \frac{100 \times 10^3}{(3400 - 2323,6)} = 92,90 \text{ kg/s} = 334,44 \text{ t/h}$$

2. Množstvo paliva pre kotol.

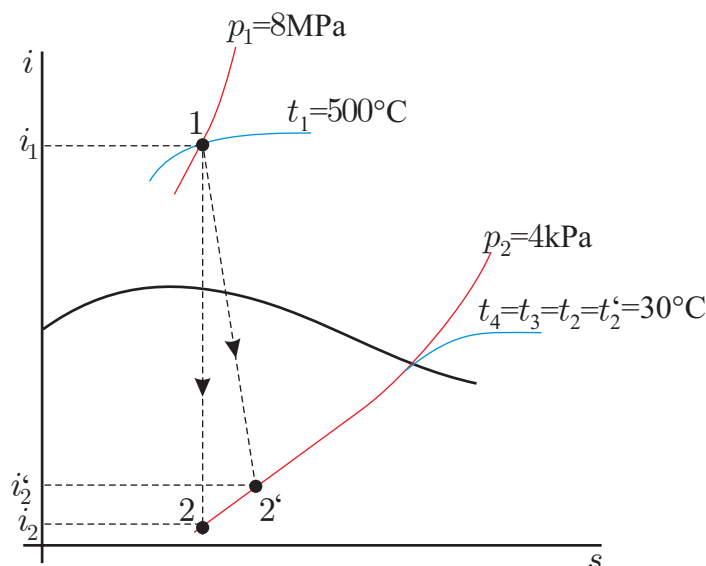
Dodávka tepla do kotla sa uskutočňuje za konštantného tlaku, teda technická práca je nulová. Potom môžeme písať

$$\dot{Q}_1 = \Delta \dot{I}_{41} = \dot{m}_p (i_1 - i_4)$$

teda všetko dodané teplo sa spotrebuje na zmenu entalpie medzi pracovnými bodmi 4 a 1.

Pre tepelný výkon kotla platí

$$P_{Q1} = \dot{Q}_1 = \dot{m}_{pal} q_{pal} \eta_{kotel}$$



Obrázok 12.2: Príklad 65 - využitie $i - s$ diagramu pri určovaní pracovných bodov 1, 2 a 2'

kde $\dot{m}_{pal}$ je hľadané množstvo paliva, q_{pal} je výhrevnosť paliva a η_{kotol} je účinnosť kotla. Pre zmenu entalpie medzi bodmi 4 a 1 môžeme písať

$$\Delta \dot{I}_{41} = \dot{m}_{p,skut} (i_1 - i_4)$$

Hľadané množstvo paliva dostaneme nasledovne

$$\dot{m}_{pal} = \dot{m}_{p,skut} \frac{(i_1 - i_4)}{q_{pal} \eta_{kotol}}$$

Entalpia i_4 : v bode 4 sa nachádza kvapalina s teplotou t_4 a tepelnou kapacitou $c_{H_2O} = 4,2$ kJ/kgK, pre entalpiu kvapaliny v bode 4 platí $i_4 = c_{H_2O} t_4$. Keďže teplota kvapaliny sa v čerpadle nemení, platí $t_4 \doteq t_3$. Teplota t_3 je teplota kvapaliny na konci kondenzácie, ktorá ale prebieha pri konštantnej teplote, teda $t_4 = t_3 = t'_2 = t_2$. Z $i - s$ diagramu dostávame $t_4 = 30^\circ\text{C}$, a teda $i_4 = 4,2 \cdot 30 = 126$ kJ/kg (keďže v bode 3 je takisto kvapalina s rovnakými parametrami, platí $i_3 = i_4$).

Entalpia i_1 : $i_1 = 3400$ kJ/kg - vid'. bod 1

$$\dot{m}_{pal} = 92,90 \frac{(3400 - 126)}{15 \times 10^3 \cdot 0,84} = 24,14 \text{ kg/s} = 86,9 \text{ t/h}$$

3. Množstvo chladiacej vody pre kondenzáciu.

Kondenzácia prebieha pri konštantnom tlaku, takže platí vzťah

$$\dot{Q}_2 = \Delta \dot{I}_{2'3}$$

Keďže sa teplo $\dot{Q}_2$ odoberá, bude so znamienkom $-$.

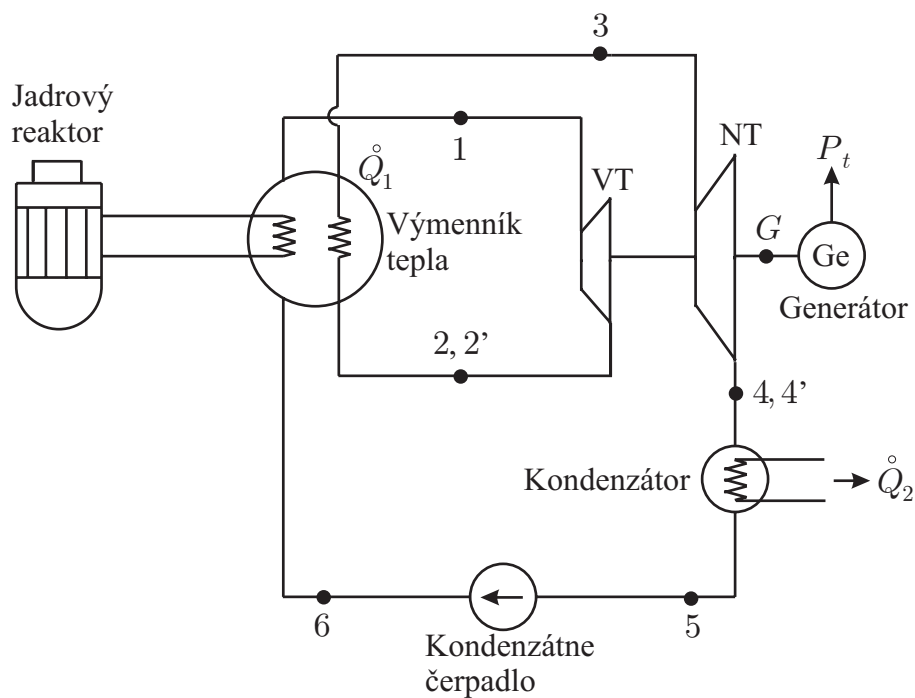
$$\begin{aligned} -\dot{m}_{p,skut} (i_3 - i'_2) &= \dot{m}_{chladH_2O} c_{H_2O} \Delta t_{chladH_2O} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{m}_{chladH_2O} &= \dot{m}_{p,skut} \frac{(i'_2 - i_3)}{c_{H_2O} \Delta t_{chladH_2O}} = 92,90 \frac{(2323,6 - 126)}{4,2 \cdot 10} = 4860,88 \text{ kg/s (l/s)} \end{aligned}$$

4. Tepelná účinnosť obehu.

$$\eta_t = 1 - \frac{q_2}{q_1} = 1 - \frac{(i'_2 - i_3)}{(i_1 - i_4)} = 1 - \frac{(2323,6 - 126)}{(3400 - 126)} = 0,33$$

Príklad 66 Jadrová elektrárň výkonu 440 MW (za generátorom) pracuje podľa Clausius - Rankinovho obehu s medziprehrevom pary. Vstupné parametre pary: $p_1 = 4,36 \text{ MPa}$ a $t_1 = 255 \text{ °C}$. Tlak v kondenzátore je 7 kPa. Vnútorňá termodynamická účinnosť turbíny je: vysokotlaký stupeň $\eta_{VT} = 0,81$ a nízkotlaký stupeň $\eta_{NT} = 0,85$. Mechanická účinnosť a účinnosť generátora je $\eta_m \cdot \eta_g = 0,97$. Medziprehrev prebieha pri tlaku 0,44 MPa, para sa prehrieva na 210 °C . Vypočítajte:

1. spotrebu pary $\dot{m}_p$
2. tepelný výkon sekundárneho obehu
3. tepelnú účinnosť obehu.



Obrázok 12.3: Príklad 66 - Rankinov obeh s medziprehrevom pary

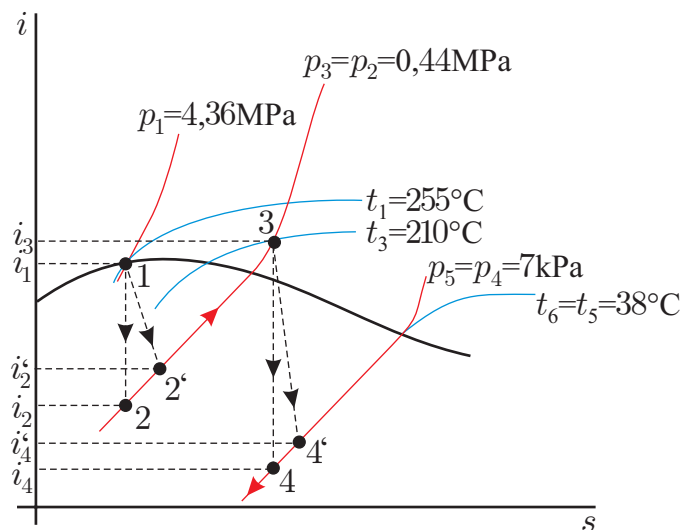
Riešenie:

1. Spotreba pary.

Pri výpočte potrebného množstva pary potrebujeme poznať výkon za turbínou, t.j. pred generátorom P_{tG} - bod G. Tento výkon určíme pomocou vzťahu

$$\eta_m \eta_g = \frac{P_t}{P_{tG}} \Rightarrow P_{tG} = \frac{P_t}{\eta_m \eta_g}$$

kde P_{tG} je výkon pred generátorom - bod G.



Obrázok 12.4: Príklad 66 - využitie $i - s$ diagramu pri určovaní jednotlivých pracovných bodov

Pre výkon v bode G obecné platí (jedná sa o adiabatické expanzie na turbínach)

$$P_{tG} = \dot{m}_p a_{t,skut}$$

a teda pre hľadané množstvo pary platí

$$\dot{m}_p = \frac{P_{tG}}{a_{t,skut}}$$

Keďže sa jedná o dvojstupňový systém, celková technická práca jedného kg pary koná technickú prácu, ktorá je daná súčtom technických prác vysokotlakého stupňa turbíny (VT) a nízkotlakého stupňa turbíny (NT)

$$a_{t,skut} = a_{tVT,skut} + a_{tNT,skut}$$

Medzi skutočnou technickou prácou (nevratnou, neizentropickou) a ideálnou technickou prácou (vratnou, izentropickou) VT stupňa turbíny a NT stupňa turbíny platia vzťahy

$$\eta_{VT} = \frac{a_{tVT,skut}}{a_{tVT,vrat}}$$

$$\eta_{NT} = \frac{a_{tNT,skut}}{a_{tNT,vrat}}$$

$a_{tVT,vrat}$ určíme pomocou vzťahu

$$a_{tVT,vrat} = (i_1 - i_2)$$

kde i_1 a i_2 určíme z $i - s$ diagramu. Z hodnôt $p_1 = 4,36$ MPa a $t_1 = 255$ °C určíme i_1 : $i_1 = 2800$ kJ/kg. Pracovný bod 2 určíme ako priesečník izoentropie z bodu 1 a izobarou s hodnotou $p_3 = p_2 = 0,44$ MPa (vo výmenníku tepla prebieha izobarický dej): $i_2 = 2400$ kJ/kg - obrázok 12.4.

$a_{tNT,vrat}$ určíme pomocou vzťahu

$$a_{tNT,vrat} = (i_3 - i_4)$$

kde i_3 a i_4 opäť určíme z $i - s$ diagramu. Pre pracovný bod poznáme teplotu prehriatia pary $t_3 = 210\text{ °C}$ a tlak $p_3 = 0,44\text{ MPa}$: $i_3 = 2880\text{ kJ/kg}$. Pracovný bod 4 určíme ako priesečník izoentropie z bodu 3 a izobary s hodnotou $p_5 = p_4 = 7\text{ kPa}$ (kondenzácia je dej izobarický a zároveň izotermický): $i_4 = 2240\text{ kJ/kg}$.

Dosadením za jednotlivé vzt'ahy príslušné výrazy dostávame pre spotrebu pary

$$\begin{aligned}\dot{m}_p &= \frac{P_t}{\eta_m \eta_g (\eta_{VT} a_{tVT, \text{vrat}} + \eta_{NT} a_{tNT, \text{vrat}})} = \frac{P_t}{\eta_m \eta_g [\eta_{VT} (i_1 - i_2) + \eta_{NT} (i_3 - i_4)]} = \\ &= \frac{440 \times 10^3}{0,97 [0,81 (2800 - 2400) + 0,85 (2880 - 2240)]} = 522,59\text{ kg/s} = 1881,32\text{ t/h}\end{aligned}$$

2. Tepelný výkon sekundárneho obehu.

Pre tepelný výkon platí vzt'ah

$$P_{Q1} = \dot{Q}_1 = \dot{m}_p (q_{pVT} + q_{pNT})$$

Pre dodané teplo jednému kg pary VT stupňa turbíny dostávame

$$q_{pVT} = i_1 - i_6$$

Hodnota entalpie v bode 6 za čerpadlom sa rovná hodnote entalpie pred čerpadlo v bode i_5 , kde sa nachádza voda s teplotou, ktorú odčítame z $i - s$ diagramu na základe známeho tlaku $p_5 = 7\text{ kPa}$. Odčítaná hodnota teploty je $t_6 = t_5 = 38\text{ °C}$. Potom entalpia vody s takouto teplotou je

$$i_6 = c_{H_2O} t_6 = 4,2 \cdot 38 = 159,6\text{ kJ/kg}$$

Pre dodané teplo jednému kg pary NT stupňa turbíny dostávame

$$q_{pNT} = i_3 - i'_2$$

Skutočnú entalpiu v bode 2' určíme pomocou vnútornej termodynamickej účinnosti VT stupňa turbíny

$$\begin{aligned}\eta_{VT} &= \frac{a_{tVT, \text{skut}}}{a_{tVT, \text{vrat}}} = \frac{(i_1 - i'_2)}{(i_1 - i_2)} \Rightarrow i'_2 = i_1 - \eta_{VT} (i_1 - i_2) \\ i'_2 &= 2800 - 0,81 (2800 - 2400) = 2476\text{ kJ/kg}\end{aligned}$$

Dosadením za jednotlivé vzt'ahy príslušné výrazy dostávame pre tepelný výkon sekundárneho obehu

$$P_{Q1} = \dot{Q}_1 = 522,59 [(2800 - 159,6) + (2880 - 2476)] \times 10^3 = 1590\text{ MW}$$

3. Tepelná účinnosť obehu.

Tepelná účinnosť obehu je definovaná

$$\eta_t = \frac{P_t}{P_{Q1}} = \frac{440}{1590} = 0,276$$

12.3 Neriešené príklady

Príklad 67 Parný Rankinov obeh pracuje medzi tlakmi 10 MPa a 4 kPa, vstupná teplota je 500 °C. Vypočítajte tepelnú účinnosť obehu a porovnajte ju s účinnosťou Carnotovho obehu, ktorý pracuje medzi rovnakými teplotami. Expanzie sú adiabatické vratné.

Príklad 68 Ako sa mení tepelná účinnosť Rankinovho obehu od meniacej sa teploty vstupnej pary 300, 400, 500 a 600 °C pri rovnakom tlaku 3 MPa? Tlak v kondenzátore je 0,01 MPa a expanzie sú adiabatické vratné.

Príklad 69 V turbíne kondenzačnej jadrovej elektrárne expanduje syta para z tlaku 4 MPa na tlak 20 kPa s vnútornou termodynamickou účinnosťou 0,82. Treba určiť:

1. množstvo pary, ak turbína má mať výkon 440 MW
2. tepelný výkon parogenerátora a prietochné množstvo vody parogenerátorom (primárnej), ak vstupná teplota vody do PG je 300 °C a výstupná voda z PG je 270 °C. Merné teplo vody v rozsahu 270 - 300 °C je 5,2 kJ/kgK a v rozsahu teplôt 20 - 100 °C je 4,2 kJ/kgK
3. tepelnú účinnosť obehu.

Čast' III

Hydromechanika

Kapitola 13

Hydrostatický tlak, jeho meranie a výpočet

13.1 Základné pojmy

- Súčiniteľ teplotnej roztlačnosti β_t je definovaný nasledovne

$$\beta_t = \frac{1}{V_0} \frac{dV}{dt} [\text{K}^{-1}] \quad (13.1)$$

kde V_0 je počiatočný objem a t je teplota. Potom pre objem V môžeme písať

$$V = V_0 + \Delta V = V_0 + \beta_t V_0 (t - t_0) \quad (13.2)$$

- Súčiniteľ objemovej stlačiteľnosti β_p je definovaný nasledovne

$$\beta_p = -\frac{1}{V_0} \frac{dV}{dp} [\text{Pa}^{-1}] \quad (13.3)$$

kde p je tlak. Pre objem V môžeme písať

$$V = V_0 - \Delta V = V_0 - \beta_p V_0 (p - p_0) \quad (13.4)$$

	$\beta_t [\text{K}^{-1}]$	$\beta_p [\text{Pa}^{-1}]$
H ₂ O	$2,8 \times 10^{-4}$	$4,85 \times 10^{-10}$
olej	1×10^{-3}	$4,58 \times 10^{-10}$

- Tlak.

Meria sa tlakomermi. Môžu byť kvapalinové, trubicové, membránové,... Merajú rozdiel medzi tlakom meraného média (absolútnym tlakom) a tlakom okolitého prostredia (atmosferickým tlakom). Ak meraný tlak je väčší ako atmosferický tlak, prístroj ukazuje pretlak a prístroje na meranie pretlaku sa nazývajú manometre. Ak meraný tlak je nižší ako atmosferický, prístroj ukazuje podtlak a prístroje na meranie podtlaku sa nazývajú vákuometre.

- Pretlak - ak tlak plynu je väčší ako atmosferický ($p_{abs} > p_{bar}$), je udaný výrazom

$$p_{abs} = p_{bar} + p_{pretlak} = p_{bar} + \rho q h \quad (13.5)$$

kde p_{abs} je absolútny tlak, ktorý sa rovná súčtu tlakov barometrického p_{bar} a pretlaku $p_{pretlak}$, ρ je hustota meracej látky, h je vertikálna vzdialenosť uvažovaného miesta od hladiny, na ktorú pôsobí barometrický tlak p_{bar} - obrázok 13.2.

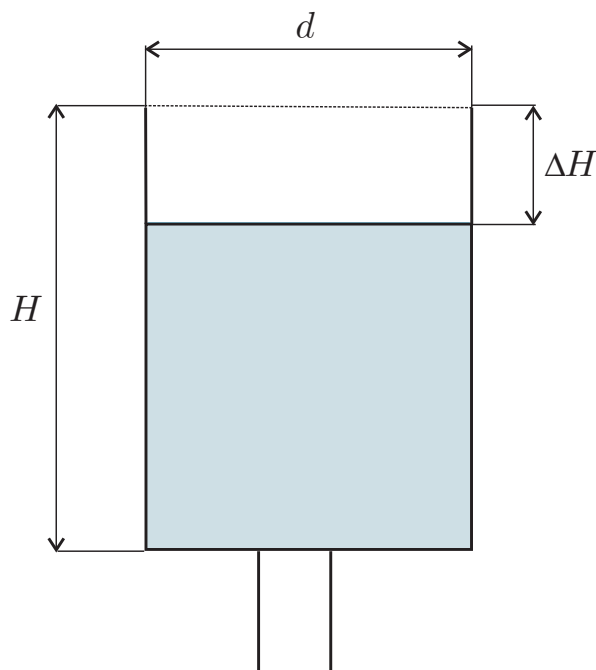
- Podtlak - ak tlak plynu je menší ako atmosferický ($p_{abs} < p_{bar}$), je udaný výrazom

$$p_{abs} = p_{bar} - p_{vak} \quad (13.6)$$

kde p_{vak} je údaj vákuometra.

13.2 Riešené príklady

Príklad 70 Aká veľká musí byť expanzná nádrž kruhového prierezu - obrázok 13.1, aby pojala prebytočnú vodu pri zmene teploty o $\Delta t = 60\text{ }^{\circ}\text{C}$. V systéme je $V_0 = 6\text{ m}^3$ vody, $d = 0,5\text{ m}$.



Obrázok 13.1: Príklad 70 - zadanie

Riešenie:

Pre celkový objem expanznej nádrže platí vzťah (13.2)

$$V = V_0 + \beta_t V_0 \Delta t = \frac{\pi d^2}{4} H \Rightarrow H = \frac{4}{\pi d^2} (V_0 + \beta_t V_0 \Delta t)$$

Celková výška expanznej nádrže H musí byť

$$H = \frac{4}{\pi 0,5^2} (6 + 2,8 \times 10^{-4} \cdot 6 \cdot 60) = 31,07\text{ m}$$

pričom

$$\Delta H = \frac{4}{\pi d^2} \beta_t V_0 \Delta t = \frac{4}{\pi 0,5^2} 2,8 \times 10^{-4} \cdot 6 \cdot 60 = 0,51\text{ m}$$

Zväčšenie objemu Θ je

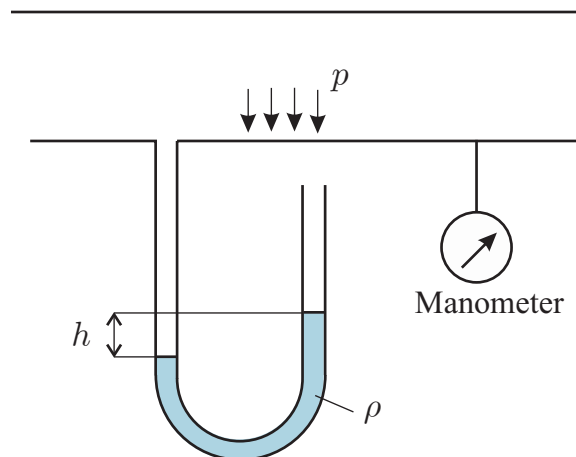
$$\Theta = \frac{\Delta V}{V_0} 100\% = \frac{\Delta H}{H - \Delta H} 100\% = \frac{0,51}{31,07 - 0,51} 100\% = 1,67\%$$

Príklad 71 Aký prírastok tlaku by vznikol v systéme z predošlej úlohy (príklad 70), ak by bol navrhnutý bez expanznej nádoby.

Riešenie:

Tu musíme uvažovať prípad, kedy by sme nami vypočítaný objem z predošlého príkladu museli stlačiť na objem 6 m^3 , t.j. $V = 6\text{ m}^3$ a objem V_0 odpovedá výške H . Tento prípad popisuje vzťah (13.4)

$$\Delta V = \beta_p V_0 \Delta p \Rightarrow \Delta p = \frac{\Delta V}{\beta_p V_0} = \frac{\Delta H}{\beta_p H} = \frac{0,51}{4,85 \times 10^{-10} \cdot 31,07} = 33,84\text{ MPa}$$



Obrázok 13.2: Príklad 72 - zadanie

Príklad 72 Určite tlak plynu v potrubí, ak $h = 200 \text{ mm}$, $\rho = 13600 \text{ kg/m}^3$ (Hg) - obrázok 13.2.

Riešenie:

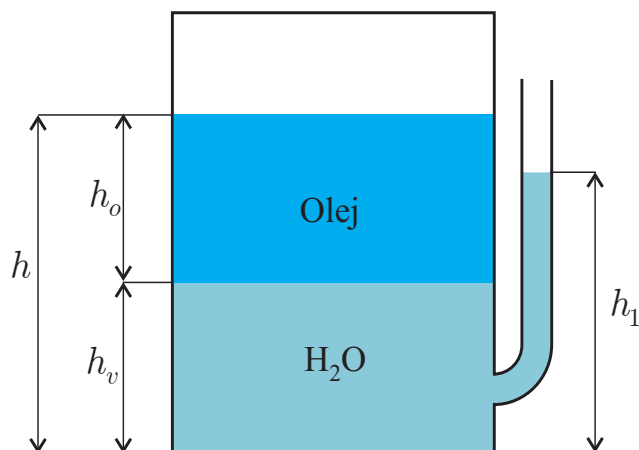
Tlak v potrubí (pretlak oproti okoliu) sa určí podľa vzťahu (13.5)

$$p = \rho g h = 13600 \cdot 9,81 \cdot 0,2 = 26,68 \text{ kPa}$$

Ak by sme uvažovali s barometrickým tlakom $p_{bar} = 100 \text{ kPa}$, potom v potrubí je absolútny tlak

$$p_{abs} = p_{bar} + p = 100 + 26,68 = 126,68 \text{ kPa}$$

Príklad 73 Vo valcovej nádobe s priemerom $d = 300 \text{ mm}$ je voda a olej - obrázok 13.3. Vypočítajte objem vody a oleja s hustotami: olej $\rho_o = 900 \text{ kg/m}^3$ a voda $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$ ak $h = 1,8 \text{ m}$ a $h_1 = 1,65 \text{ m}$.



Obrázok 13.3: Príklad 73 - zadanie

Riešenie:

Na dno valcovej nádoby pôsobí tlak od vody aj oleja

$$p = (\rho_o h_o + \rho_v h_v) g$$

Tento tlak sa ale zároveň musí rovnať tlaku vodného stĺpca v trubici

$$p = \rho_v h_1 g$$

Spojením týchto dvoch rovníc a využitím výrazu $h = h_o + h_v$ dostávame

$$\begin{aligned} \rho_v h_1 &= \rho_o (h - h_v) + \rho_v h_v \\ h_v &= \frac{\rho_v h_1 - \rho_o h}{\rho_v - \rho_o} = \frac{1000 \cdot 1,65 - 900 \cdot 1,8}{1000 - 900} = 0,3 \text{ m} \end{aligned}$$

Objem vody

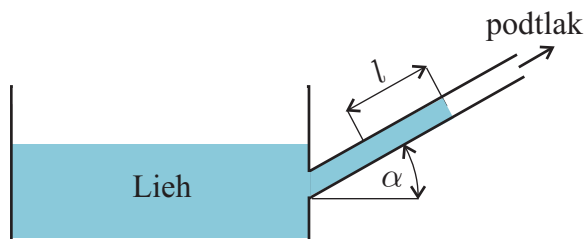
$$V_v = \frac{\pi d^2}{4} h_v = \frac{\pi 0,3^2}{4} 0,3 = 21,2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

Objem oleja

$$V_o = \frac{\pi d^2}{4} (h - h_v) = \frac{\pi 0,3^2}{4} 1,5 = 106 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

13.3 Neriešené príklady

Príklad 74 Aký podtlak meria vákuometer, ak dĺžka liehového stĺpca - obrázok 13.4 je $l = 245 \text{ mm}$ a uhol sklonu trubice je $\alpha = 30^\circ$? Hustota liehu je $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$.



Obrázok 13.4: Príklad 74 - zadanie

Príklad 75 Aká vysoká musí byť expanzná nádrž ústredného kúrenia kruhového prierezu, aby pojala prebytočnú vodu pri zohriatí celého systému z 10°C na 90°C pričom počiatočný objem vody v systéme je 2 m^3 .

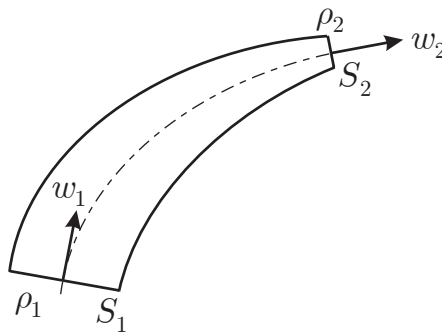
Príklad 76 Vypočítajte, ako sa zvýši tlak v systéme ústredného kúrenia z príkladu 75, ak bude uzavretý bez expanznej nádoby.

Kapitola 14

Rovnica kontinuity - dimenzovanie potrubí, Bernoulliho rovnica, hydraulické straty

14.1 Základné pojmy

- Rovnica kontinuity - vyjadruje zákon zachovania hmoty pri prúde tekutiny, teda platí všeobecne aj pre plyny.



Obrázok 14.1: Rovnica kontinuity

Hmotnostný prietok v priereze 1

$$Q_{m1} = S_1 w_1 \rho_1 \text{ [kg/s]} \quad (14.1)$$

Hmotnostný prietok v priereze 2

$$Q_{m2} = S_2 w_2 \rho_2 \text{ [kg/s]} \quad (14.2)$$

Rovnica kontinuity konštatuje, že hmotnostné prietoky v oboch prierezoch musia byť rovnaké

$$S_1 w_1 \rho_1 = S_2 w_2 \rho_2 \quad (14.3)$$

Pri kvapalinách sa spravidla hustota nemení a potom rovnica (14.3) má tvar

$$S_1 w_1 = S_2 w_2 \quad (14.4)$$

Táto rovnica vyjadruje rovnosť objemových prietokov.

- Bernoulliho rovnica - vyjadruje zákon zachovania energie pri prúdení kvapaliny a je to najdôležitejšia rovnica hydrodynamiky. Pre ideálny stav môžeme pre celkovú mernú energiu písať

$$e = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} = \text{konštanta [J/kg]} \quad (14.5)$$

kde gz predstavuje tiažovú zložku energie (potenciálnu), p/ρ - tlakovú zložku energie a $w^2/2$ - kinetickú zložku energie.

Často sa Bernoulliho rovnica vyjadruje v tlakoch

$$\rho gz + p + \rho \frac{w^2}{2} = \text{konštanta [N/m}^2\text{]} \quad (14.6)$$

alebo vo výškach

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{w^2}{2g} = \text{konštanta [m]} \quad (14.7)$$

- Hydraulické straty - ako už bolo spomenuté, Bernoulliho rovnica (14.5) platí pre ideálny stav. V skutočnosti pri prúdení vznikajú straty, ktoré sú spôsobené hydraulickými odpormi. Taktiež ich môžeme písať v tvare energetickom, tlakovom alebo výškovom. Najčastejšie sa píše v tvare výškovom.

Hydraulické straty h_s rozdelíme na:

- miestne h_m : miestne straty sú spôsobené napr. vtokom, výtokom, kolenom, náhlou zmenou prierezu, vo všeobecnosti všetkými miestnymi odpormi, zaradenými v potrubí

$$h_m = \xi \frac{w^2}{2g} \text{ [m]} \quad (14.8)$$

kde ξ je súčiniteľ miestnej straty, ktorý sa určuje experimentálne.

- dĺžkové h_d : sú spôsobené vzájomným trením jednotlivých vrstiev kvapaliny v potrubí priemeru d a dĺžky l

$$h_d = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} \text{ [m]} \quad (14.9)$$

kde λ je súčiniteľ strát trením a jeho veľkosť závisí od typu prúdenia.

Ak je prúdenie laminárne

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (14.10)$$

Ak je prúdenie turbulentné a steny potrubia sú hladké

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\text{Re}}} \quad (14.11)$$

Pre drsné potrubia vystupuje vo vzťahu pre λ aj relatívna drsnosť.

Re predstavuje Reynoldsovo číslo, pre ktoré pre kruhové potrubie priemeru d a kinematickej viskozity kvapaliny ν , ktorá prúdi rýchlosťou w , platí vzťah

$$\text{Re} = \frac{wd}{\nu} \quad (14.12)$$

Na posúdenie typu prúdenia sa využíva kritické Reynoldsovo číslo $\text{Re}_{krit} = 2320$

$\text{Re} < \text{Re}_{krit}$ prúdenie je laminárne
 $\text{Re} > \text{Re}_{krit}$ laminárne prúdenie prechádza v turbulentné (zmiešané prúdenie)
 $\text{Re} \gg \text{Re}_{krit}$ Re je rádovo 10^4 - prúdenie je určite turbulentné

14.2 Riešené príklady

Príklad 77 Vypočítajte priemery sacieho (d_1) a výtlačného (d_2) kruhového potrubia čerpadla, ak poznáme: $\dot{m} = 72 \text{ t/h}$, $w_1 = 1 \text{ m/s}$, $w_2 = 2 \text{ m/s}$ a $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Riešenie:

Pre hmotnostný prietok musí platiť vzt'ah (14.1)

$$Q_m = S_1 w_1 \rho \Rightarrow S_1 = \frac{Q_m}{w_1 \rho} = \frac{72 \times 10^3}{3600 \cdot 1 \cdot 10^3} = 0,02 \text{ m}^2$$

A priemer d_1

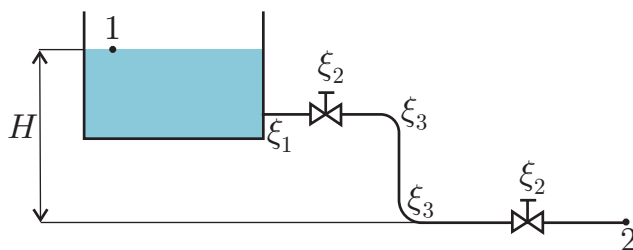
$$d_1 = \sqrt{\frac{4S_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,02}{\pi}} = 0,159 \text{ m}$$

Pre prierez S_2 platí

$$S_1 w_1 = S_2 w_2 \Rightarrow d_1^2 w_1 = d_2^2 w_2$$

$$d_2 = d_1 \sqrt{\frac{w_1}{w_2}} = 0,159 \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,112 \text{ m}$$

Príklad 78 Vypočítajte výtokovú rýchlosť z potrubia w_2 a $\dot{m}$ podľa obrázka 14.2. Dané sú: $H = 20 \text{ m}$, priemer potrubia $d = 40 \text{ mm}$, dĺžka potrubia $l = 40 \text{ m}$, $\nu = 0,9 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (kinematická viskozita), $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, miestne straty: $\xi_1 = 0,5$, $\xi_2 = 5$, $\xi_3 = 0,1$.



Obrázok 14.2: Príklad 78 - zadanie

Riešenie:

Pre body 1 a 2 podľa obrázka 14.2 musí platiť Bernoulliho rovnica, ku ktorej ale treba pripísať hydraulické straty (e_s) v systéme

$$e_1 = e_2 + e_s \text{ [J/kg]}$$

Túto rovnicu môžeme prepísať na bilanciu výšok

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} + h_s \text{ [m]}$$

Ak si zvolíme nulovú (referenčnú) hladinu na úrovni bodu 2 ($z_2 = 0$), a uvedomíme si, že tlak v bode 1 aj 2 je tlak okolia a rýchlosť kvapaliny v bode 1 je nulová pričom hladina je na konštantnej úrovni, potom môžeme písať

$$H = \frac{w_2^2}{2g} + h_s$$

Pre hydraulické straty môžeme písať podľa (14.9) a (14.8)

$$h_s = h_d + h_m = \lambda \frac{l}{d} \frac{w_2^2}{2g} + \xi_1 \frac{w_2^2}{2g} + 2\xi_2 \frac{w_2^2}{2g} + 2\xi_3 \frac{w_2^2}{2g}$$

Keďže výtokovú rýchlosť w_2 nepoznáme a súčiniteľ strát trením λ je podľa vzťahu (14.10) resp. (14.11) závislý na Reynoldsovom čísle, ktoré je podľa vzťahu (14.12) funkciou neznámej rýchlosti w_2 , musíme v prvom priblížení súčiniteľ λ odhadnúť. Náš typ je $\lambda = 0,02$. Pre hľadanú výtokovú rýchlosť w_2 dostávame z Bernoulliho rovnice

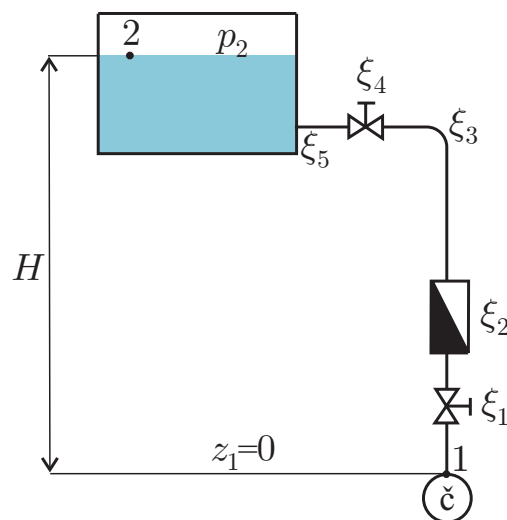
$$w_2 = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \lambda \frac{l}{d} + \xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 20}{1 + 0,02 \frac{40}{0,04} + 0,5 + 10 + 0,2}} = 3,51 \text{ m/s}$$

Pre túto výtokovú rýchlosť je podľa vzťahu (14.12) Reynoldsovo číslo $Re = 156369$, a teda na výpočet λ použijeme vzťah pre turbulentné prúdenie (14.11), kde dostávame $\lambda = 0,0159$.

Opätovným výpočtom výtokovej rýchlosti w_2 dostávame $w_2 = 3,769 \text{ m/s}$, čomu odpovedá Reynoldsovo číslo $Re = 167548$, čo predstavuje súčiniteľ strát trením $\lambda = 0,0156$. Zhoda medzi použitým λ vo výpočte (0.0159) výtokovej rýchlosti w_2 a odpovedajúcim λ (0.0156) danej výtokovej rýchlosti w_2 je dobrá, dané výsledky budeme považovať za konečné - výtoková rýchlosť z potrubia je $w_2 = 3,769 \text{ m/s}$.

Ak by sme neuvažovali hydraulické straty ($h_s = 0$), dostali by sme výraz $w_2 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 20} = 19,8 \text{ m/s}$. Vidíme, že hydraulické straty spôsobujú veľký pokles rýchlosti a nemôžeme ich zanedbať.

Príklad 79 Vypočítajte potrebný tlak čerpadla podľa obrázka 14.3, ak poznáme: $d = 40 \text{ mm}$, $l = 30 \text{ m}$, $H = 15 \text{ m}$, $w_1 = 2 \text{ m/s}$, $p_2 = 0,3 \text{ MPa}$ (absolútny tlak), $\nu = 0,8 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\xi_1 = 5$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 0,1$, $\xi_4 = 5$, $\xi_5 = 0,5$.



Obrázok 14.3: Príklad 79 - zadanie

Riešenie:

Opäť budeme vychádzať z Bernoulliho rovnice, ktorú vyjadríme v tlakoch (14.6), pričom nulová hladina súradnice z bude v bode 1. V bode 2 je rýchlosť prúdenia nulová.

$$p_1 + \rho \frac{w_1^2}{2} = p_2 + \rho g H + \rho g h_s \text{ [Pa]}$$

Pri hydraulických stratách treba určiť λ . Keďže rýchlosť prúdenia v potrubí poznáme, dokážeme λ určiť presne na základe Reynoldsového čísla (14.12)

$$Re = \frac{w_1 d}{\nu} = \frac{2 \cdot 0,04}{0,8 \times 10^{-6}} = 1 \times 10^5 \Rightarrow \text{jedná sa o turbulentné prúdenie}$$

Potom pre λ použijeme vzťah (14.11)

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}} = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{1 \times 10^5}} = 0,0177$$

Pre hydraulické výškové straty môžeme písať

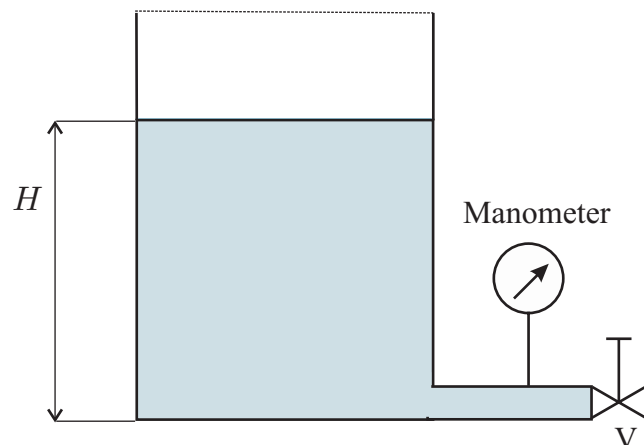
$$h_s = \frac{w_1^2}{2g} \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum_{i=1}^5 \xi_i \right) = \frac{4}{2 \cdot 9,81} \left(0,0177 \frac{30}{0,04} + 11,6 \right) = 5,071 \text{ m}$$

Potom pre tlak čerpadla dostávame

$$p_1 = p_2 + \rho g (H + h_s) - \rho \frac{w_1^2}{2} = 0,3 \times 10^6 + 10^3 \cdot 9,81 (15 + 5,071) - 10^3 \frac{4}{2} = 0,495 \text{ MPa}$$

14.3 Neriešené príklady

Príklad 80 Z nádoby naplnenej vodou prúdi potrubím s priemerom $d = 80 \text{ mm}$, pričom manometer ukazuje tlak $p_1 = 48 \text{ kPa}$. Pri uzavretom ventile V je údaj manometra $p_2 = 52 \text{ kPa}$. Vypočítajte výšku hladiny H v nádrži a prietok vody pri otvorenom ventile - obrázok 14.4.



Obrázok 14.4: Príklad 80 - zadanie

Príklad 81 Z hornej nádrže tečie ideálna kvapalina bez strát potrubím s priemerom $d = 100 \text{ mm}$. Rozdiel hladín v nádržiach je $\Delta h = 1,8 \text{ m}$. Aký je prietok?

Príklad 82 Horizontálnym ropovodom s priemerom $d = 600 \text{ mm}$ a dĺžky $l = 3 \text{ km}$ treba dopraviť denne (za 24 hodín) 26 000 ton ropy. Vypočítajte tlak čerpadla potrebný na prekonanie trenia, ak viskozita ropy je $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$.

Príklad 83 Priame potrubie má spád $h = 20 \text{ m}$ a dĺžku $l = 300 \text{ m}$. Vypočítajte maximálny priemer potrubia, ak pri prúdení ropy s viskozitou $\nu = 74 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ má byť prúdenie ešte laminárne.

Príklad 84 Vypočítajte výkon motora, ktorý s účinnosťou $\eta = 0,65$ poháňa čerpadlo na dopravu $\dot{V} = 12$ litrov za sekundu vody potrubím s priemerom $d = 85 \text{ mm}$ do výšky $h = 15 \text{ m}$. Potrubie je dlhé $l = 70 \text{ m}$ a súčet súčiniteľov miestnych odporov je $\sum \xi_i = 17$.

Čast' IV

Tabul'ky a diagramy

