

1. Základné pojmy statiky

Učebný cieľ kapitoly

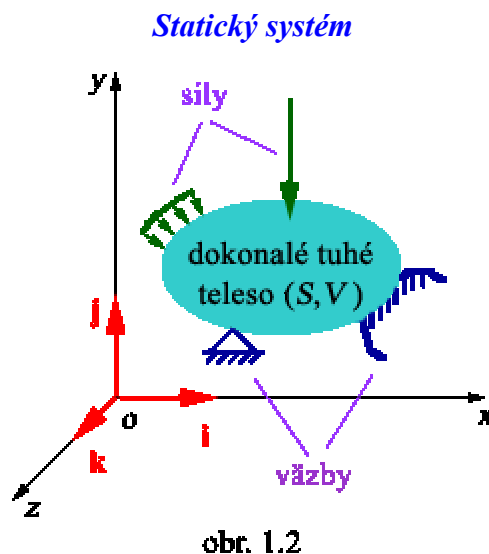
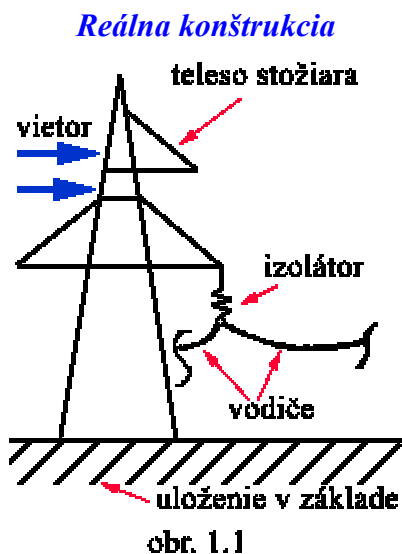
Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali zvládnuť základné pojmy statiky:

- Hmotný bod, hmotné teleso, stupne voľnosti pohybu hmotného bodu a telesa v rovine a priestore
- Sila a silové účinky
- Silová sústava, výslednica silovej sústavy, určovanie veľkosti a polohy výslednice
- Rovnice ekvivalencie, statické podmienky rovnováhy
- Čo sú to väzby a väzbové reakcie, uvoľňovanie telies

1.1 DOKONALE TUHÉ TELESO

1.1.1 Dokonale tuhé teleso v statickej rovnováhe

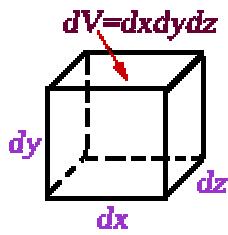
Z reálnej nepohyblivej konštrukcie (napr. stožiar vn upevnený v betónovom základe a zaťažený vlastnou tiažou, tiažou vodičov a vetrom) sa vytvorí mechanický model (statický systém):



Statický systém ktorý je abstrakciou reálnej konštrukcie, nachádzajúci sa v okamžitom čase t v statickej rovnováhe, obsahuje:

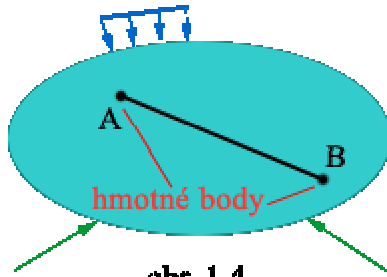
- dokonale tuhé teleso (abstrakcia stožiara) s objemom V a povrchom S
- vzťažný kartézsky súradnicový systém $O(x, y, z)$: $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, sú bázové jednotkové vektory
- sily (dané pôsobením tiaže jednotlivých konštrukčných prvkov, pôsobením vetra, atď.)
- väzby dané upevnením telesa

1.1.2 Dokonale tuhé teleso ako sústava hmotných bodov



obr. 1.3

Hmotný bod - časť hmotného telesa s elementárnym objemom $dV [m^3]$ a elementárnym povrchom $dS [m^2]$ s definovanou mernou hmotnosťou $\rho [kg/m^3]$, obsahujúci veľké množstvo elementárných častíc hmoty. Častou geometrickou interpretáciou hmotného bodu (jeho okolia) je elementárny hranol. Hmotné body budú označené veľkými alebo malými písmenami, napr.: A, B, a, b, ...



obr. 1.4

Hmotné teleso - oblasť s objemom V a povrchom S spojitou vyplnené hmotnými bodmi. Ak pre vzdialenosť dvoch ľubovoľných bodov telesa A, B pred i po zaťažení silami platí:

$AB = \text{konšt.}$ - teleso je nedeformovateľné, čiže **dokonalé tuhé**

$AB \neq \text{konšt.}$ - teleso sa účinkom zaťaženia deformuje, čiže **poddajné teleso**

V statike predpokladáme existenciu dokonale tuhého telesa, čo je len abstrakciou reálneho telesa, ktoré je vždy poddajné. V niektorých prípadoch statiky možno modelovať celé teleso jediným hmotným bodom - **ťažiskom telesa**, kde je sústredená tiaž celého telesa.

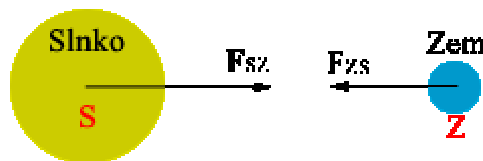
1.2 SILA

1.2.1 Sila a jej účinky

Sila je mierou vzájomného mechanického pôsobenia telies (alebo hmotných bodov). Označuje sa spravidla tučnými písmenami veľkej abecedy: **F**, **P**, **A**, ...

Silové pôsobenie:

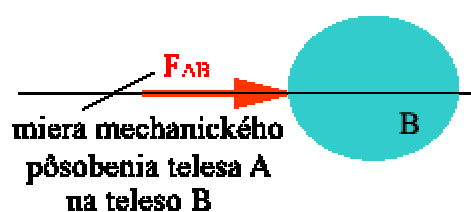
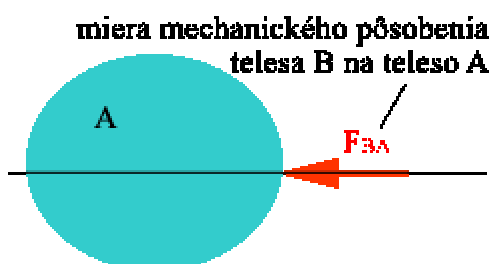
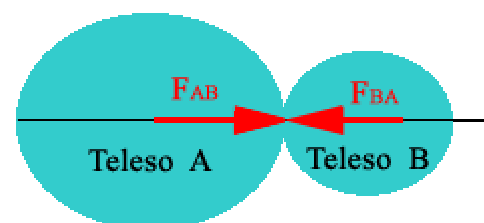
1. bez vzájomného styku



obr. 1.5

Na základe zákona akcie a reakcie sily vzájomného pôsobenia sú rovnako veľké, t.j. $F_{AB} = -F_{BA}$, resp. $F_{SZ} = -F_{ZS}$. Akcia leží s reakciou na jednej nositeľke, je rovnako veľká, ale opačne orientovaná.

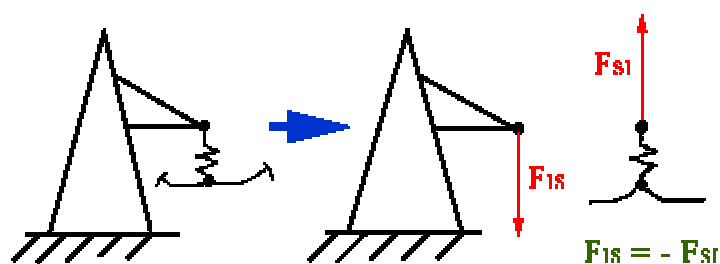
2. cez vzájomný styk (bodový alebo plošný)



obr. 1.6

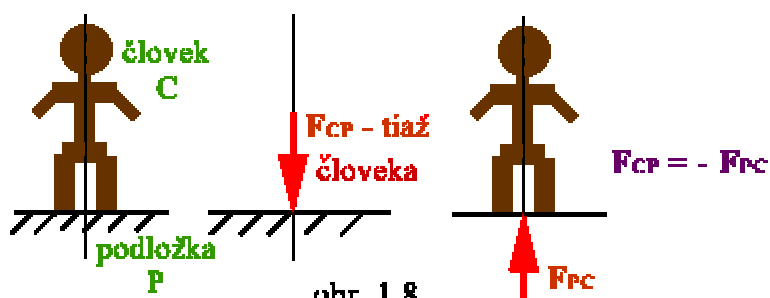
1.2.2 Príklady vzájomného pôsobenia

- vzájomné silové (mechanické) pôsobenie izolátora a ramena stožiaru



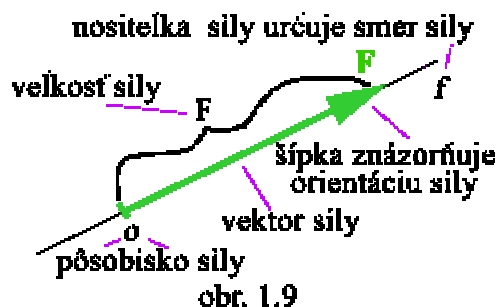
obr. 1.7

- vzájomné mechanické pôsobenie človeka a podložky



obr. 1.8

1.2.3 Klasifikácia sily



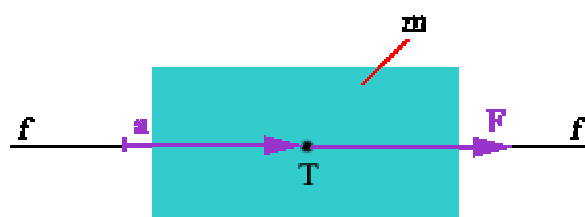
obr. 1.9

-Sila je fyzikálna veličina charakteru vektora.

-Má svoje pôsobisko, veľkosť, smer a orientáciu.

-Graficky sa znázorňuje ako orientovaná úsečka, ležiaca na priamke - *nositeľke sily*.

1.2.4 Zákon sily, jednotka sily



obr. 1.10

-Telo s hmotnosťou m sa účinkom sily F pohybuje zrýchlením a .

-Potom sila spôsobujúca tento pohyb $F = m \cdot a$ - *Newtonov zákon sily*.

-Vektory F a a sú rovnobežné, ležiace na spoločnej priamke.

1.2.5 Veľkosť sily

$F = |\mathbf{F}| = m|a|$ - je skalárna (na zmene vzťažného súradnicového systému nezávislá) veličina, je rovná absolútnej hodnote vektora sily.

$= ma$

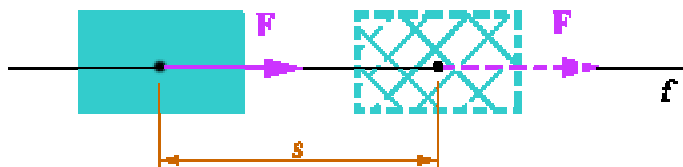
-základná jednotka veľkosti sily: $1\text{kg} \cdot (1\text{m/s}^2) = 1\text{N}$ (1 Newton)

-sila $F = 1\text{N}$ udáva telesu o hmotnosti $m = 1\text{kg}$ zrýchlenie 1m/s^2 .

-odvozené jednotky: $1\text{kN} = 10^3\text{N}$, $1\text{MN} = 10^6\text{N}$

1.2.6 Práca a výkon sily

- práca vykonaná silou F je: $A = Fs$
- jednotkou mechanickej práce je 1Joule , značka $[J]$
- prácu rovnú $1J$ vykoná sila veľkosti $1N$ na dráhe $1m$ ($1J = 1Nm$)



obr. 1.11

- výkon sily je jej práca A vykonaná za určitý čas τ . $P = A/\tau [J/s]$

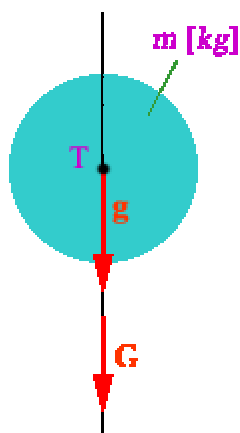
- jednotkou výkonu je 1Watt , značka $[W]$

-výkon $1W$ predstavuje prácu $1J$ vykonanú za čas 1 sekundy

($1 J/s = 1 W$)

1.2.7 Gravitačná (ťažová) sila

Na všetky hmotné telesá pôsobí ťažová sila úmerná jeho hmotnosti $m[\text{kg}]$ a ťažovému zrýchleniu $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.



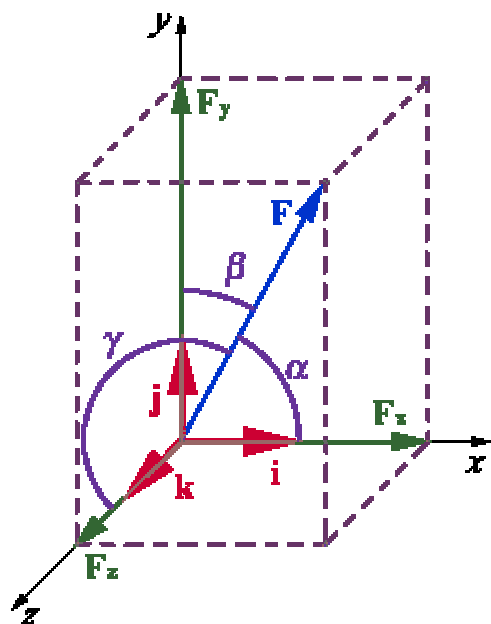
- veľkosť ťažovej sily je $G = m \cdot g [\text{N}]$, a jej výslednica, ktorá smeruje do stredu Zeme (zvislý smer) pôsobí v ťažisku telesa

- na 1 kg hmotnosti telesa pôsobí v gravitačnom poli Zeme ťažová sila $G = 9,81 \text{ N}$. V technických výpočtoch sa táto sila často zaokrúhľuje na $G = 10 \text{ N}$.

obr. 1.12

1.2.8 Zložky sily v kartézskom súradnicovom systéme

Silu ako vektor možno rozložiť na zložky v smere súradnicových osí:



obr. 1.13

- **v priestore:**

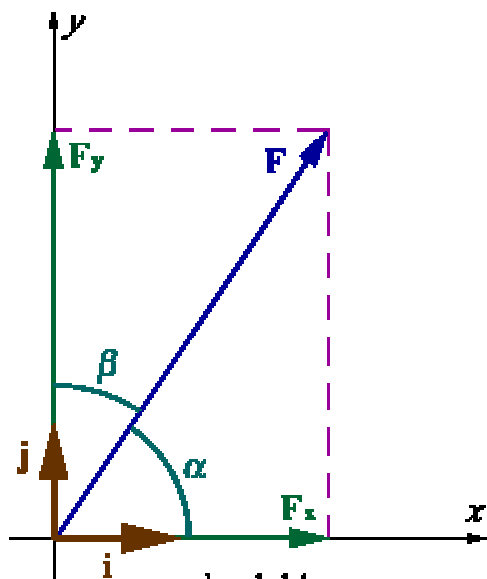
Potom: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z = \mathbf{i}F_x + \mathbf{j}F_y + \mathbf{k}F_z$

Smerové uhly sily: α, β, γ , pričom

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}$$

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$



obr. 1.14

- *v rovine:*

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y = i F_x + j F_y$$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = 0$$

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

1.2.9 Účinky sily

Pôsobenie sily na tuhé hmotné teleso sa prejaví jeho premiestnením, ktoré možno rozdeliť na posunutie a natočenie. Ľubovoľná úsečka AB sa premiestni do polohy A'B', pričom $AB = A'B'$.

Sila teda má:

- *posuvný účinok* – $PÚ$
- *otáčavý účinok* – $OÚ$

$PÚ$ - je charakterizovaný veľkosťou sily: $PÚ \triangleq F$ a je ku každému bodu telesa rovnaký.

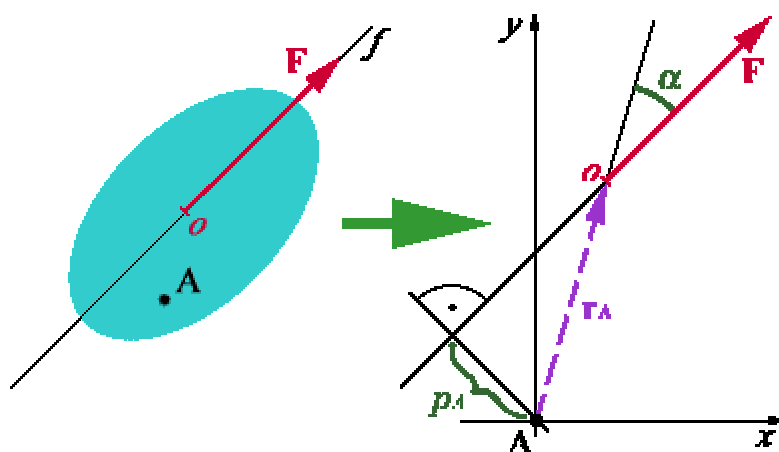
$OÚ$ - je charakterizovaný momentom sily:

Moment sily je vektorom, a jeho veľkosť $M = |\mathbf{M}|$ je k rôznym bodom telesa rôzna.

Úloha: Treba nájsť moment sily $\mathbf{F}$ k bodu A .

- Platí: $\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}$

- $\mathbf{r}_A$ je polohový vektor pôsobiska sily k počiatku súradnicového systému uloženému do bodu A .



obr. 1.15

1.2.10 Veľkosť momentu sily

$$M_A = r_A F \sin \alpha = F r_A \sin \alpha = F p_A \text{ [Nm]}$$

- jednotkou veľkosti momentu je 1 Nm (1 Newtonmeter).

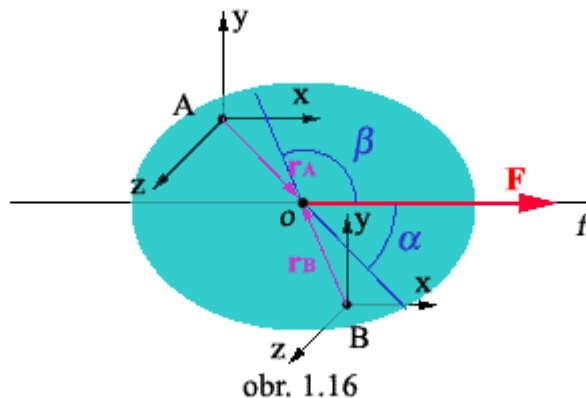
- veľkosť momentu sily k bodu je rovná súčinu veľkosti sily a ramena sily.
- kolmá vzdialenosť nositeľky sily od bodu A - p_A [m] sa nazýva *ramenom sily*.

1.2.11 Smer a orientácia momentu sily

- Moment sily k bodu telesa je vektor, ktorého nositeľka je kolmá na rovinu tvorenej nositeľkou sily a polohovým vektorom daného bodu.
- Jeho orientácia je daná jednotkovým vektorom $\mathbf{e}$, pre ktorého orientáciu platí pravidlo pravej ruky:

Moment sily je kladný, ak polohový vektor a sila tvoria pravotočivý systém (proti pohybu hodinových ručičiek). V opačnom prípade je moment sily k danému bodu záporný (v smere pohybu hodinových ručičiek).

Úloha: Stanovte smer a orientáciu momentu sily k bodom A a B.



obr. 1.16

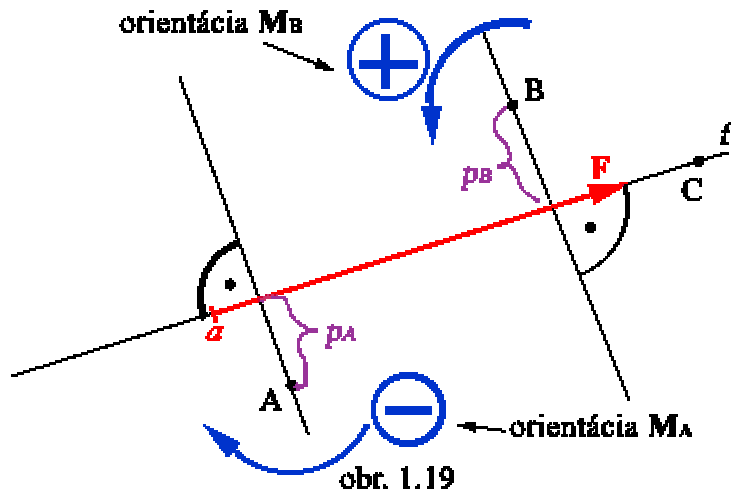
Moment sily k bodu A:

- posunutím vektora $\mathbf{r}_A$ do bodu o dostaneme pravotočivý systém dvoch vektorov.
- moment sily k bodu A je kladný.
- potom: $\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} = \mathbf{e}_A M_A$
- $\mathbf{e}_A$ je jednotkový vektor kolmý na rovinu tvorenú vektormi $\mathbf{r}_A$ a $\mathbf{F}$.
 $e_A = |\mathbf{e}_A| = 1$
- veľkosť momentu $M_A = + F r_A \sin \alpha$
- kladný moment má znamienko plus.

Moment sily k bodu B:

- posunutím vektora $\mathbf{r}_B$ do bodu o dostaneme ľavotočivý systém dvoch vektorov.
- moment sily k bodu B je záporný.
- potom: $\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} = \mathbf{e}_B M_B$
- $\mathbf{e}_B$ je jednotkový vektor kolmý na rovinu tvorenú vektormi $\mathbf{r}_B$ a $\mathbf{F}$.
 $e_B = |\mathbf{e}_B| = 1$
- veľkosť momentu $M_B = - F r_B \sin \beta$
- záporný moment má znamienko mínus.

Úloha: Určite veľkosť a znamienko momentov sily $\mathbf{F}$ k bodu A, B a C. Všetky body i sila ležia v jednej rovine (bod C leží na nositeľke sily).



Moment k bodu A

- točí na ramene sily p_A v smere pohybu hod.ručičiek
- je záporný
- teda $M_A = -p_A F$

Moment k bodu B

- je kladný
- teda $M_B = p_B F$

Moment k bodu C

- je rovný nule
- t.j. $M_C = 0$ lebo $p_C = 0$

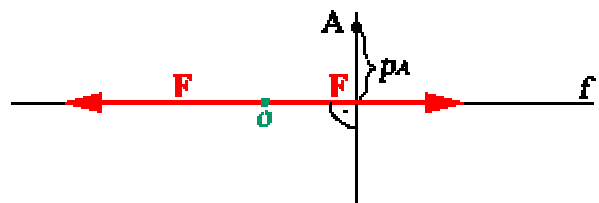
Všeobecne platí : Moment sily k ľubovoľnému bodu ležiacemu na jej nositeľke (tam leží aj pôsobisko sily) je rovný nule (má nulový otáčavý účinok). K týmto bodom má len posuvný účinok, ktorý je rovný veľkosti sily.

Úloha:

Určite silové účinky dvoch rovnako veľkých, ale opačne orientovaných síl ležiacich na spoločnej nositeľke.

PÚ: $F - F = 0$

OÚ: $Fp_A - Fp_A = 0$ - platí k ľubovoľnému bodu



obr. 1.20

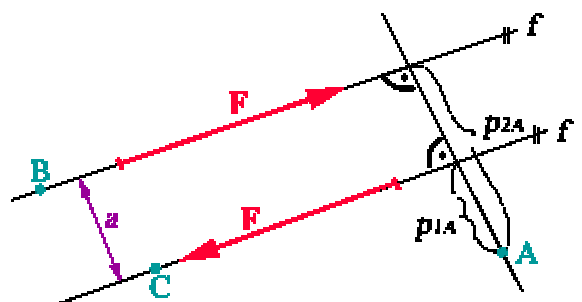
Záver: Dve rovnako veľké sily, ležiace na spoločnej nositeľke a opačne orientované majú nulový silový účinok.

Úloha:

Určite silové účinky dvoch rovnako veľkých opačne orientovaných síl ležiacich na paralelných nositeľkách, ktorých kolmá vzdialenosť je a .

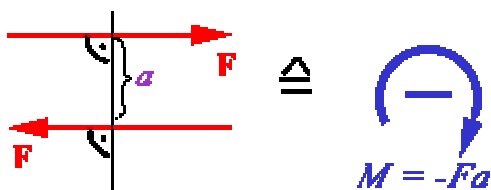
PÚ: $F - F = 0$

OÚ: $M_A = Fp_{1A} - Fp_{2A} = F(p_{1A} - p_{2A}) = -Fa$
 $M_B = -Fa = M_C = M_A$

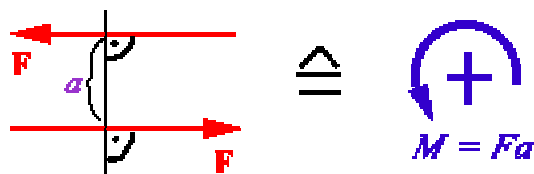


obr. 1.21

Záver: Posuvný účinok je nulový, otáčavý účinok je rovný súčinu veľkosti sily F a ich kolmej vzdialenosti a , pričom je ku všetkým bodom telesa rovnaký. Orientácia momentu je závislá na orientácii dvojice síl:



obr. 1.22

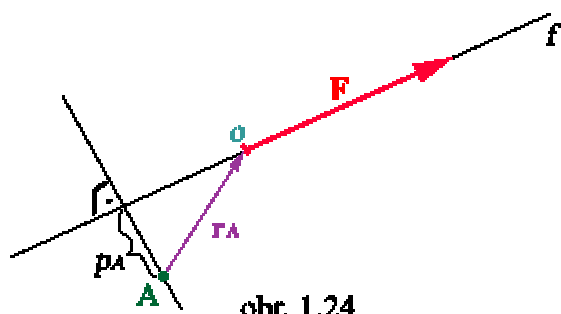


obr. 1.23

1.2.12 Transformácia sily

Transformáciou sily nahrádzame transformovanú silu inou silou. Ak nová sila má rovnaké účinky ako sila pôvodná, potom takáto náhrada je *ekvivalentnou transformáciou sily*.

Úloha: Vykonajte ekvivalentnú transformáciu sily $\mathbf{F}$ tak, aby jej nové pôsobisko bolo v bode A .

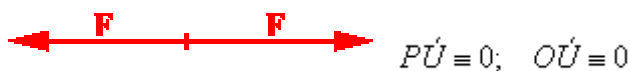


obr. 1.24

Účinky sily $\mathbf{F}$:

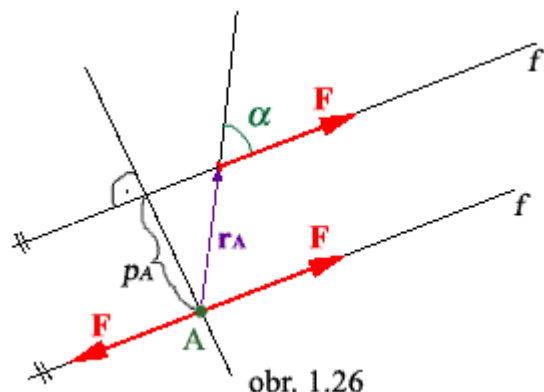
- posuvný účinok ($PÚ$): je rovný sile F
- otáčavý účinok ($OÚ$): $M_A = -p_A F$
- $PÚ$ aj $OÚ$ majú byť zachované aj po transformácii

Transformáciu možno vykonať pripojením silovej dvojice s nulovými účinkami do bodu A : dve rovnako veľké sily $\mathbf{F}$ ležiace na spoločnej nositeľke, ale opačne orientované.

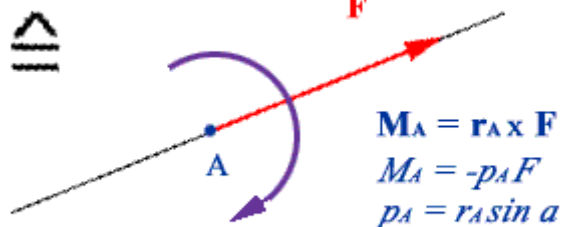


obr. 1.25

Čiže :



obr. 1.26



obr. 1.27

Posuvný účinok všetkých troch síl: $P\dot{U} \equiv F$

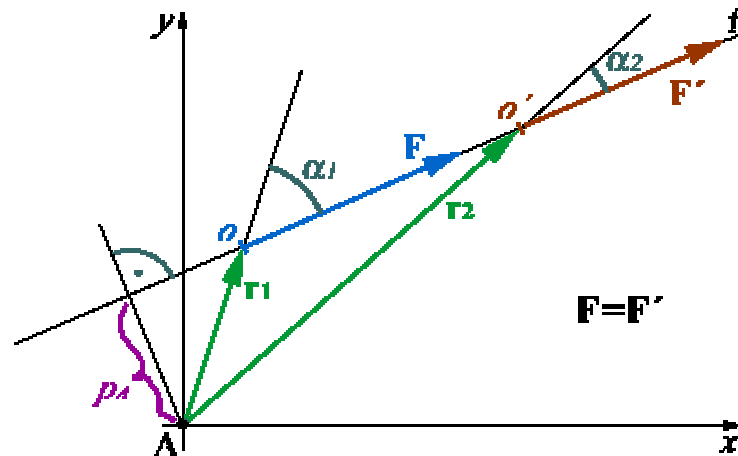
Otáčavý účinok všetkých troch síl: $O\dot{U} \equiv -p_A F$

Záver : Silu F možno ekvivalentne transformovať do iného pôsobiska tak, že do daného bodu vložíme rovnakú silu F a moment $M_A = r_A \times F$.

1.2.13 Posunutie sily po nositeľke

Je to špeciálna transformácia sily. Posunutím sily po jej nositeľke sa jej silové účinky nezmenia.

Dôkaz :



obr. 1.28

$$P\dot{U}: F = F'$$

$$O\dot{U}: M_1 = r_1 \times F \Rightarrow M_1 = r_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot F = p_A F$$

$$M_2 = r_2 \times F' \Rightarrow M_2 = r_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot F' = p_A F' = p_A F$$

$$M_1 = M_2$$

Posunutím sily po jej nositeľke sa jej statické účinky nemenia. Pozor: deformačné účinky sily sa zmenia, t.j., deformácia poddajného telesa je závislá aj na pôsobisku sily.

1.2.14 Rozdelenie síl

Sily delíme:

I. podľa charakteru

- vonkajšie** (vyjadrujú účinok okolitých telies a prostredia na vyšetrované teleso)
 - zatťažujúce** (akcie)
 - väzbové reakcie** (závislé od akčných síl)
- vnútorné** (vyjadrujú účinok jednej časti telesa na druhú. Vznikajú vo vnútri telesa ako odozva na *vonkajšie sily*. Ak vnútorné sily prekročia určitú hranicu, dôjde k veľkým deformáciám alebo ku porušeniu telesa.)

II. podľa rozloženia

- a. **sústredené** (sila $F[N]$ alebo moment sily $M[Nm]$), sú sústredené do jedného bodu - pôsobiska
- b. **spojitorozložené** (V statike sa väčšinou ekvivalentne nahrádzajú sústredenými silami.)
 - i. **plošné** (napr. tlak $p [N/m^2]$)
 - ii. **objemové** (napr. vlastná tiaž $\gamma [N/m^3]$)
 - iii. **čiarové** (napr. vlastná tiaž na jednotku dĺžky telesa $q [N/m]$.)

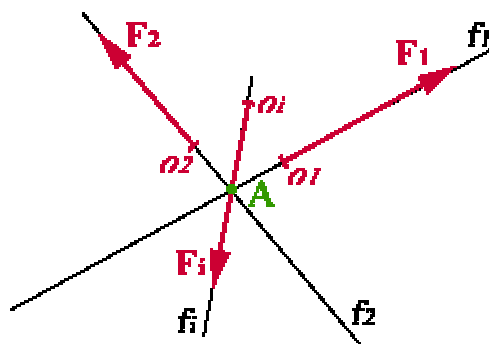
1.3 SILOVÁ SÚSTAVA

1.3.1 Rozdelenie silových sústav

Dve a viacero síl pôsobiacich na teleso sa nazýva silová sústava. Silové sústavy sa delia:

I. podľa rozloženia

- a. **centrálne** -nositeľky všetkých síl sa pretínajú v jednom bode (obr. 1.29)



obr. 1.29

- b. **všeobecne rozptýlené** -nositeľky síl sa vzájomne pretínajú v rôznych bodoch

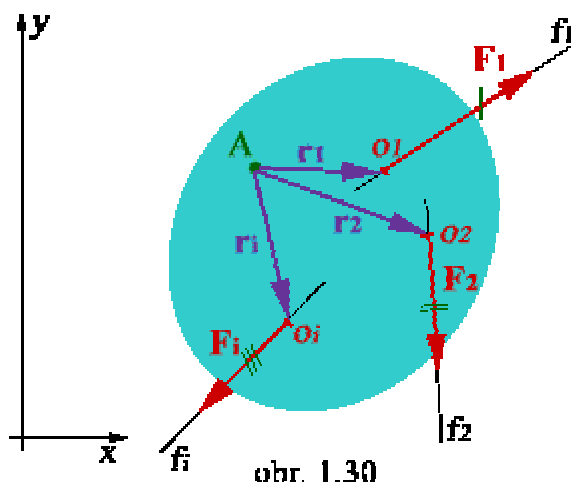
II. podľa rozmiestnenia v priestore

- a. **rovinné** -nositeľky všetkých síl ležia v jednej rovine
- b. **priestorové** -nositeľky síl sú rozložené v priestore

Priestorovú silovú sústavu možno transformovať na tri rovinné sústavy ležiace v rovinách kartezského súradnicového systému. Ďalej sa preto vo väčšine prípadov budeme zaoberať rovinnými sústavami síl.

1.3.2 Účinky silovej sústavy (SS)

Silová sústava má posuvný a otáčavý účinok. Majme sily $F_1, F_2, \dots, F_i$ ležiace v jednej rovine.



obr. 1.30

Posuvný účinok SS

- je daný súhrnom posuvných účinkov jednotlivých síl:

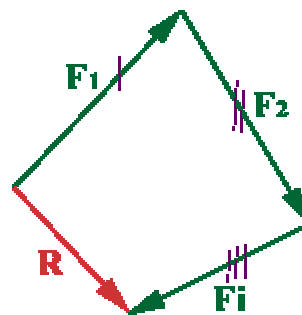
$$R = |\mathbf{R}|; \quad \mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

Výslednica všetkých síl $\mathbf{R}$ silový (vektorový) obrazec uzatvára.

Platí:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad - \text{ veľkosť výslednice síl}$$

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{x_i}; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{y_i} \quad - \text{ zložky výslednice síl}$$



obr. 1.31

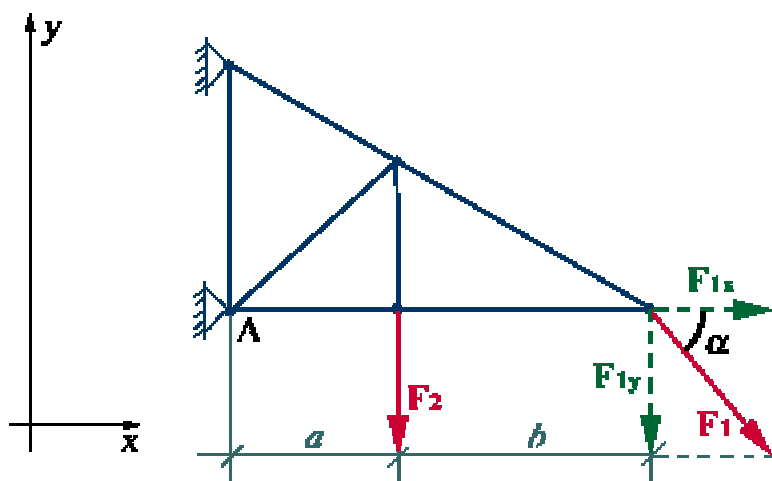
Otáčavý účinok SS

- k bodu telesa je daný súhrnom otáčavých účinkov (momentov) jednotlivých síl:

$$\mathbf{M}_A = \sum \mathbf{M}_{iA} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

Vektor výsledného momentu rovinatej silovej sústavy je kolmý na rovinu silovej sústavy a jeho veľkosť je k rôznym bodom rovinného telesa rôzna. Jeho orientácia je závislá na orientácii a veľkosti momentov jednotlivých síl.

Úloha: Vyjadrite posuvný a otáčavý účinok síl $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ k bodu A.



obr. 1.32

PÚ:

- ku všetkým bodom ramena
stožiaru

je rovnaký

$$R = |\mathbf{R}|; \quad \mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$R_x = \sum F_{ix} = F_{1x}$$

$$R_y = \sum F_{iy} = -F_{1y} - F_2$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$F_{1x} = |\mathbf{F}_{1x}|; \quad F_{1y} = |\mathbf{F}_{1y}|$$

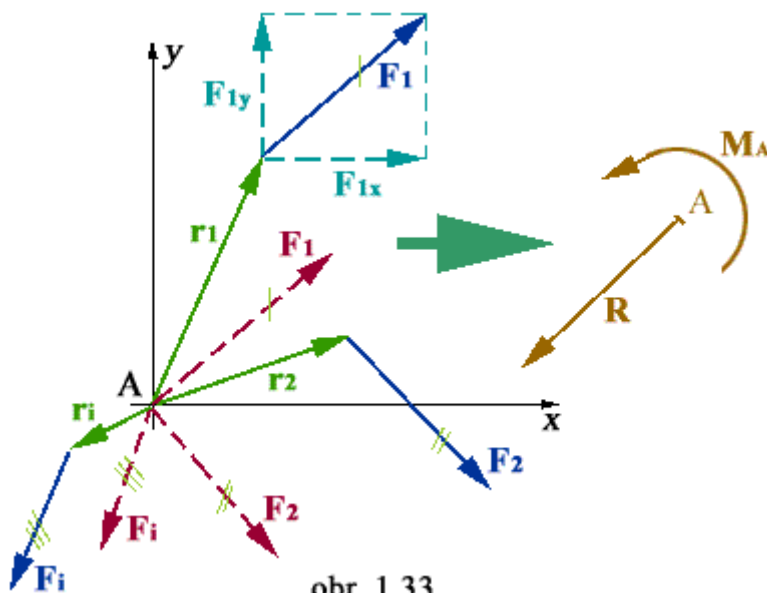
oÚ:

$$M_A = -F_{1x} \cdot 0 - F_{1y}(a+b) - F_2 a$$

$$M_A = -F_{1y}(a+b) - F_2 a$$

1.3.3 Transformácia SS do bodu

Treba ekvivalentne transformovať silovú sústavu $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_i$ do bodu A. Postupnou transformáciou jednotlivých síl a ich momentov do bodu A a ich následným vektorovým súčtom dostaneme výslednú silu $\mathbf{R}$ a výsledný moment $\mathbf{M}_A$.



obr. 1.33

PÚ:

$$R = |\mathbf{R}|; \quad \mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

$$R_x = \sum_i F_{ix}; \quad R_y = \sum_i F_{iy}$$

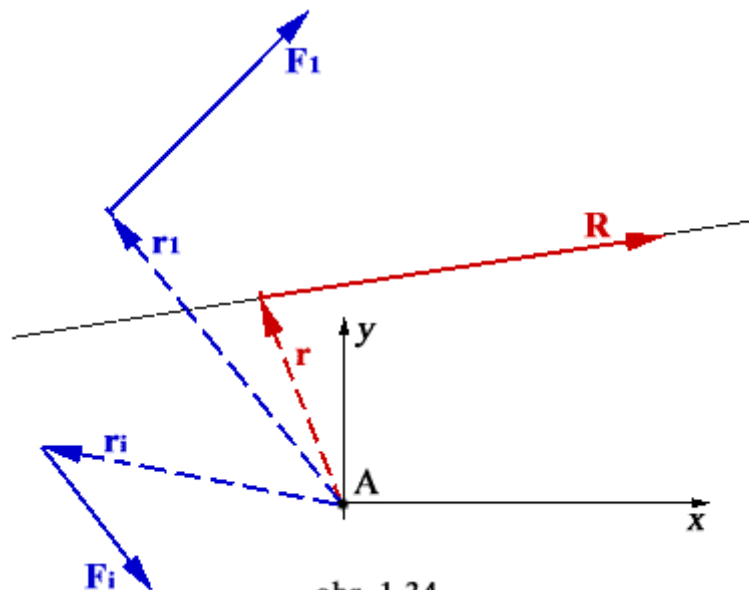
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

oÚ:

$$\mathbf{M}_A = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

1.3.4 Výslednica silovej sústavy, rovnice ekvivalencie

Výslednicu silovej sústavy dostaneme ekvivalentnou transformáciou všetkých síl do bodu, ku ktorému má silová sústava nulový otáčavý účinok. Silovú sústavu teda nahradíme len jednou silou - *výslednicou silovej sústavy* $\mathbf{R}$. Pri hľadaní výslednice SS treba určiť jej *veľkosť, smer i orientáciu* ako aj jej *pôsobisko*. Slúžia nám na to *rovnice ekvivalencie*, ktoré možno slovne vyjadriť aj takto:



Posuvný a otáčavý účinok SS k ľubovoľnému bodu A musí byť rovnaký ako je posuvný a otáčavý účinok výslednice **R** k tomu istému bodu.

Vektorový tvar rovníc ekvivalencie:

posuvný účinok

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$$

otáčavý účinok

$$\mathbf{M}_{\mathbf{RA}} = \sum \mathbf{M}_{\mathbf{IA}}$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

Skalárny tvar rovníc ekvivalencie:

priestorová SS

$$\begin{cases} R_x = \sum F_{ix} \\ R_y = \sum F_{iy} \\ R_z = \sum F_{iz} \end{cases} \rightarrow R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \rightarrow \text{veľkosť } \mathbf{R}$$

$$\begin{cases} M_{Rx} = \sum M_{ix} \\ M_{Ry} = \sum M_{iy} \\ M_{Rz} = \sum M_{iz} \end{cases} \rightarrow \text{poloha } \mathbf{R}$$

rovinná SS

$$\begin{cases} R_x = \sum F_{ix} \\ R_y = \sum F_{iy} \end{cases} \rightarrow R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$M_{Rz} = \sum M_{iz}$$

1.3.5 Rovnovážna silová sústava, statické podmienky rovnováhy

Silová sústava je v statickej rovnováhe, ak jej posuvný a otáčavý účinok je rovný nule. Takáto sústava síl sa nazýva *rovnovážna silová sústava*. Ak na teleso (hmotný bod) pôsobí rovnovážna silová sústava, teleso (hmotný bod) sa nachádza v statickej rovnováhe. Statickú rovnováhu možno popísať *statickými podmienkami rovnováhy*, ktoré sú vyjadrením nulovosti posuvného a otáčavého účinku silovej sústavy so silami $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_i$. Poznáme ich vektorový a skalárny tvar:

Vektorové rovnice rovnováhy SS:

$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \Rightarrow$ výslednica síl je rovná nule (silová rovnica rovnováhy)

$\mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \Rightarrow$ otáčavý účinok síl je rovný nule (momentová rovnica rovnováhy)

Skalárne (zložkové) rovnice rovnováhy SS:

Silové rovnice rovnováhy: $\sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0; \sum F_{iz} = 0$

Momentové rovnice rovnováhy: $\sum M_{ix} = 0; \sum M_{iy} = 0; \sum M_{iz} = 0$

Rovnovážna priestorová silová sústava musí spĺňať súčasne tri silové a tri momentové podmienky rovnováhy ku zvolenému SS. V silových rovniciach rovnováhy sa sčítavajú zložky síl F_i v smere súradnicovej osi x, resp. y, resp. z. V momentových rovniciach rovnováhy sa sčítavajú zložky momentov síl točiacich okolo súradnicových osí x, resp. y, resp. z.

Ak silová sústava spĺňa statické podmienky k jednému (ľubovoľne zvolenému) súradnicovému systému, potom ich spĺňa ku všetkým ostatným súradnicovým systémom.

Rovnovážna rovinná silová sústava musí spĺňať tri statické podmienky rovnováhy:

Silové rovnice rovnováhy: $\sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0$

Momentová podmienka rovnováhy: $\sum M_{iz} = 0$

Rovnováža dvoch síl:

Dve sily sú v statickej rovnováhe, keď sú rovnako veľké, ležia na spoločnej nositeľke a sú opačne orientované.

Rovnováža troch a viacerých síl centrálnej SS:

Centrálna silová sústava je v rovnováhe, keď jej výslednica je rovná nule (nutnou i postačujúcou podmienkou je splnenie silových rovníc rovnováhy).

Rovnováža troch a viacerých síl všeobecne rozptýlenej SS:

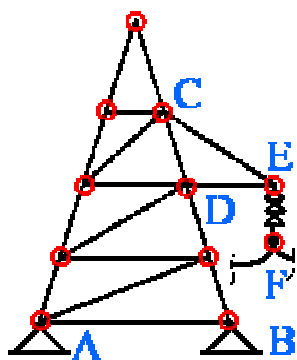
Všeobecne rozptýlená rovnovážna silová sústava musí spĺňať všetky silové i momentové podmienky rovnováhy.

Nulovosť výslednice je len nutnou podmienkou statickej rovnováhy všeobecnej silovej sústavy. Typickým príkladom nerovnovážnej silovej sústavy s nulovou výslednicou sú dve rovnako veľké, opačne orientované sily, ležiace na paralelných nositeľkách (silová dvojica). Táto silová dvojica nespĺňa momentové podmienky rovnováhy. V priebehu ďalších kapitol budeme používať pri hľadaní rovnovážnych stavov takmer výlučne *statické podmienky rovnováhy v skalárnom tvare*.

1.4 VÄZBY

1.4.1 Väzby a väzbové reakcie

Objekty (telesá, hmotné body) sa spájajú navzájom *väzbami*. V týchto väzbách vznikajú sily a momenty síl - *väzbové reakcie*. Ak mechanickú sústavu (sústavu telies, bodov) tvorí niekoľko objektov, potom sú medzi nimi tzv. *vnútorné väzby*, a reakcie v nich sú *vnútorné reakcie*. Väzby, ktorými sa upevňuje sústava k nepohyblivému telesu - tzv. *rámu*, sú *vonkajšie väzby*, a reakcie v nich sú *vonkajšie väzbové reakcie*.

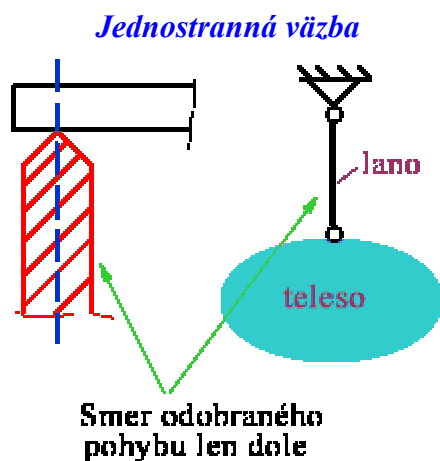


obr. 1.35

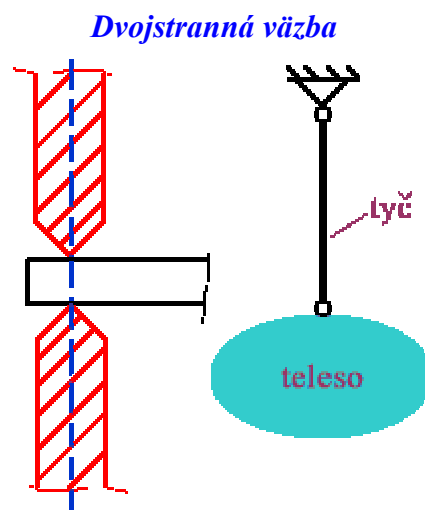
Napr.:

- v bodoch A a B sú väzby vonkajšie (pripevnenie stožiara o betónový základ)
- v bodoch C, D, E, F, ... sú väzby vnútorné (medzi vodičmi a izolátorom, izolátorom a ramenom stožiara, medzi prútmi prútovej konštrukcie stožiara)

V smere väzbovej reakcie sa odoberá objektu možnosť pohybu (posuv, resp. natočenie). Ak väzba odoberá možnosť pohybu len na jednu stranu, hovoríme o *jednostrannej väzbe*. Ak sa odoberá v danom smere možnosť pohybu na obidve strany, ide o *väzbu dvojstrannú*.



obr. 1.36



obr. 1.37

Veľkosť a orientácia väzbových reakcií závisí od akcii - vonkajšej silovej sústavy. Väzbové reakcie sa vo väzbách usporiadajú tak, že spolu s akciami tvoria rovnovážnu silovú sústavu. Veľkosť a orientáciu väzbových reakcií možno u tzv. staticky určitých uloženiach určiť zo statických podmienok rovnováhy. Problematikou väzieb a väzbových reakcií sa podrobnejšie zaoberá Kapitola 2 tejto učebnice.

2. Statika hmotného bodu a telesa

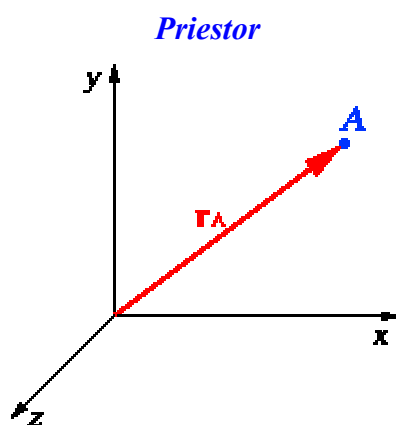
Učebný cieľ kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali vedieť:

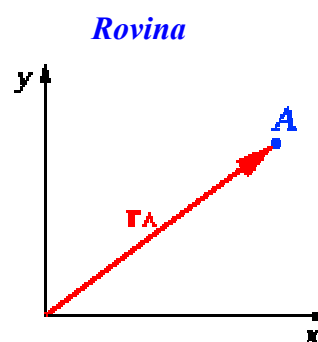
- Ako je jednoznačne určená poloha hmotného bodu a telesa v rovine, resp. v priestore
- Koľko stupňov voľnosti má hmotný bod a teleso v rovine, resp. v priestore
- Čo je to statická určitosť resp. neurčitosť uloženia a ako sa vypočíta
- Ako sa uvoľňujú väzby, ich náhrada väzbovými reakciami
- Ako možno vypočítať vonkajšie väzbové reakcie

2.1 JEDNOZNAČNÉ URČENIE POLOHY HMOTNÉHO BODU A TELESA

Poloha hmotného bodu v rovine i v priestore je jednojednoznačne určená jeho polohovým vektorom vzhľadom na vzťažný súradnicový systém.

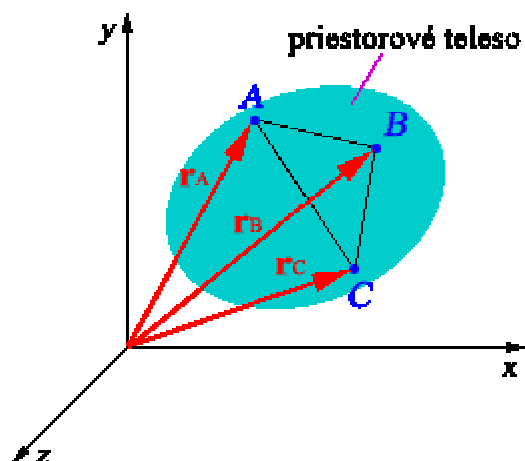


obr. 2.01a



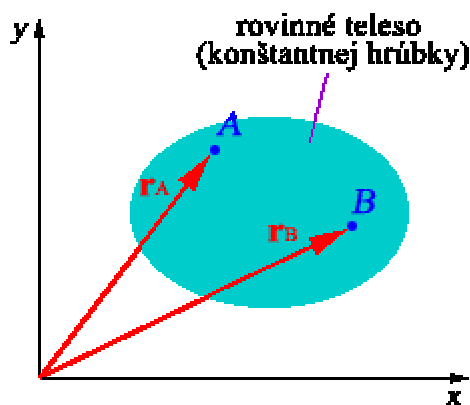
obr. 2.01b

Poloha telesa v priestore je jednojednoznačne určená polohovými vektormi jeho ľubovoľných troch bodov neležiacich na jednej priamke.



obr. 2.02

Poloha telesa v rovine je jednojednoznačne určená polohovými vektormi jeho ľubovoľných dvoch bodov ležiacich v danej rovine.

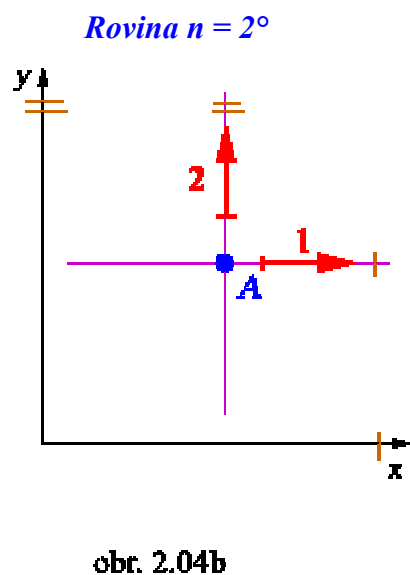
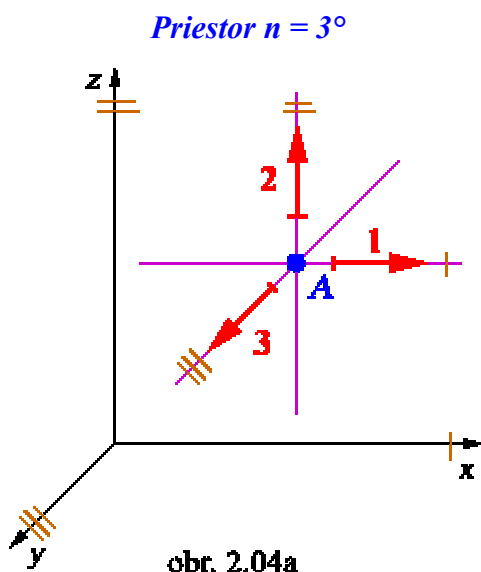


obr. 2.03

2.2 STUPNE VOĽNOSTI POHYBU

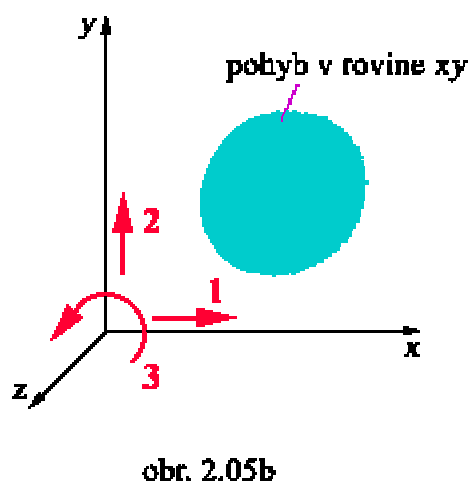
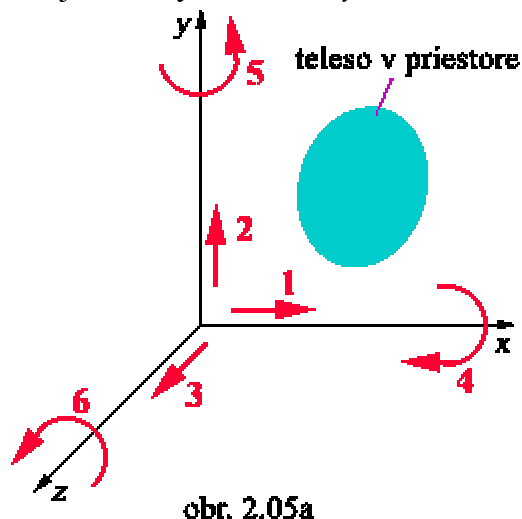
Hmotný bod v priestore má tri posuvné (translačné) stupne voľnosti pohybu **1-2-3** (napr. v smere osí vzťažného súradnicového systému). Keďže hmotný bod nemá definovaný tvar (je len abstrakciou malej časti telesa), rotačné stupne voľnosti sa mu neprisudzujú.

Hmotný bod v rovine má dva stupne voľnosti **1-2**.



Teleso má v priestore tri posuvné a tri rotačné stupne voľnosti. Má teda 6 stupňov voľnosti pohybu v priestore ($n=6^\circ$).

Teleso má v rovine dva posuvné a jeden rotačný (okolo osi z) stupeň voľnosti ($n=3^\circ$). Pohyb telesa je viazaný na rovinu xy.



2.3 VONKAJŠIE VÄZBY A VONKAJŠIE VÄZBOVÉ REAKCIE

Ak na teleso pôsobí nerovnovážna silová sústava, teleso je v pohybe. Aby sa nemohlo pohybovať, treba mu odobrať minimálne všetky stupne voľnosti pohybu väzbami. Väzbové reakcie spolu s vonkajšími zaťažujúcimi silami budú tvoriť rovnovážnu silovú sústavu a teleso bude v statickej rovnováhe. Väzbové reakcie vo väzbe pôsobia v smere odobraného stupňa voľnosti pohybu a ich veľkosť a orientácia je závislá na vonkajších silách. Pri ich výpočte ich spravidla vkladáme v kladnom zmysle - v zhode s orientáciou vzťažného súradnicového systému, a označujeme ich: R_A , R_{Ax} , M_A , A_x , ...

2.3.1 Statická určitost' - neurčitost' uloženia telesa

Je definovaná vzťahom: $i = n - r$, kde n je počet stupňov voľnosti pohybu telesa (v priestore $n = 6^\circ$; v rovine $n = 3^\circ$), r je počet stupňov voľnosti odobratých väzbami.

Môžu nastať prípady uloženia:

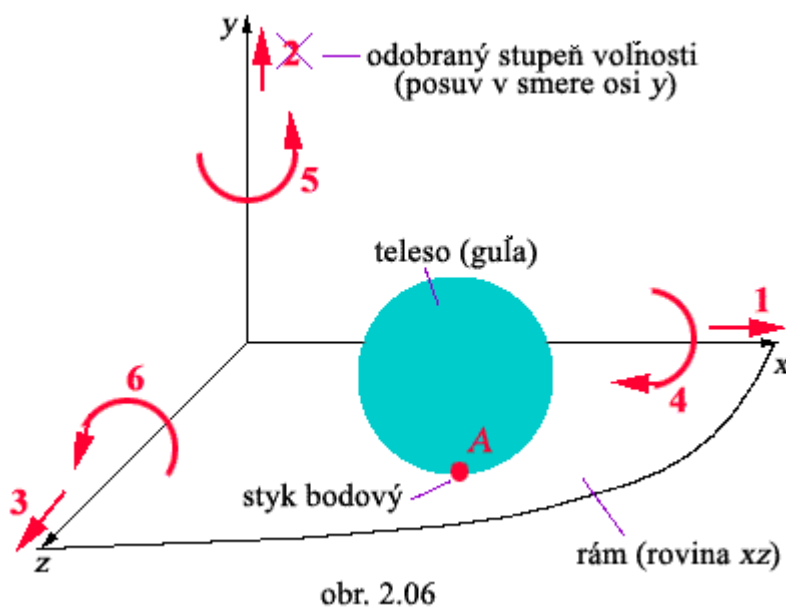
- a) $i = 0$: teleso má väzbami odobrané všetky možné stupne voľnosti pohybu - *staticky určité uloženie*
- b) $i > 0$: teleso nemá odobrané všetky stupne voľnosti, to znamená, že má pohyblivé uloženie - *staticky podurčené*. Toto uloženie je z hľadiska statickej stability telesa neprípustné.
- c) $i < 0$: teleso má odobratý väčší počet stupňov voľnosti pohybu ako ich v skutočnosti má - *statický neurčitý (preurčený) uloženie*.

Ak je teleso uložené staticky určito, na výpočet väzbových reakcií postačujú statické podmienky rovnováhy. Pri staticky neurčitom uložení je potrebné statické podmienky rovnováhy doplniť o ďalšie rovnice, vyplývajúce z deformácie telesa.

2.3.2 Typy väzieb, ich značky, náhrada väzieb väzbovými reakciami

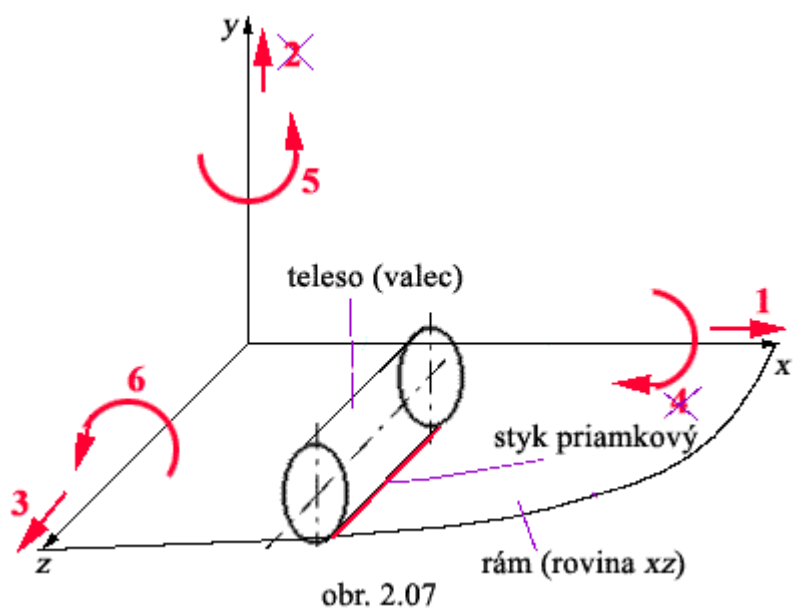
a) Priestorové úlohy

a1) Väzba odoberajúca $r = 1^\circ$ voľnosti, čiže $i = 6^\circ - 1^\circ = 5^\circ$ - teleso má ešte 5° stupňov voľnosti pohybu. Teleso (guľa) - jeho pohyb je viazaný na rovinu xz v stykovom bode A.

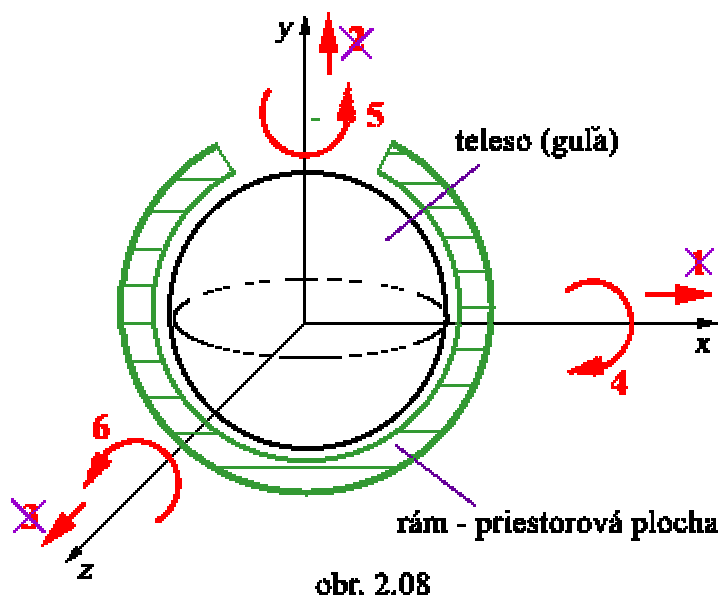


obr. 2.06

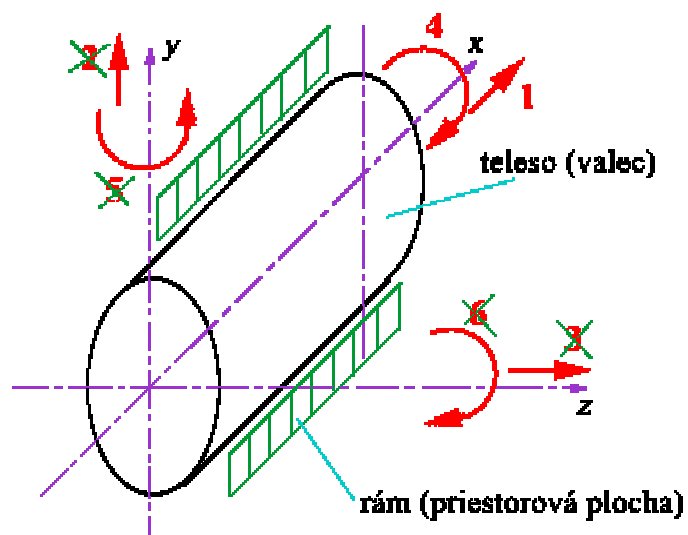
a2) Väzba odoberajúca $r = 2^\circ$ voľnosti, čiže $i = 6^\circ - 2^\circ = 4^\circ$ - teleso má ešte 4° stupne voľnosti pohybu. Teleso (valec) - jeho pohyb je viazaný na rovinu xz cez stykovú priamku. Väzba odoberá posuv v smere osi y a rotáciu okolo osi x .



a3) Väzba odoberajúca $r=3^\circ$ voľnosti, čiže $i=6^\circ-3^\circ=3^\circ$ - teleso má ešte 3° stupne voľnosti pohybu. Teleso(guľa) - jeho pohyb je viazaný na styk s priestorovou plochou. Väzba odoberá všetky tri posuvné stupne voľnosti pohybu.

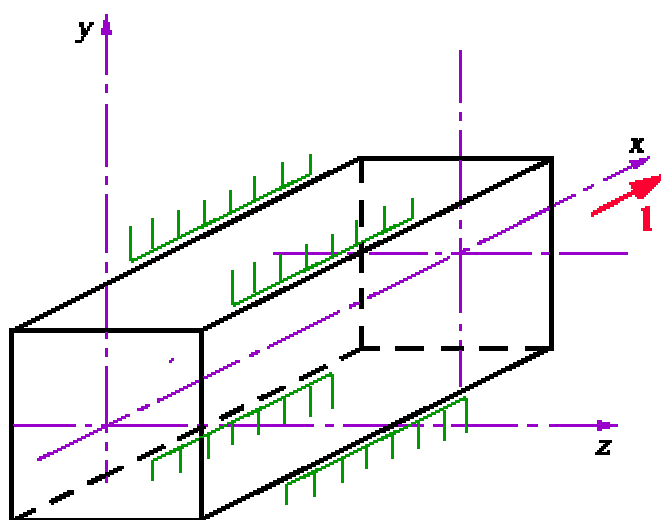


a4) Väzba odoberajúca $r=4^\circ$ voľnosti, čiže $i=6^\circ-4^\circ=2^\circ$ - teleso má ešte 2° stupne voľnosti pohybu. Väzba umožňuje telesu posuv v smere osi x a rotáciu okolo osi x .



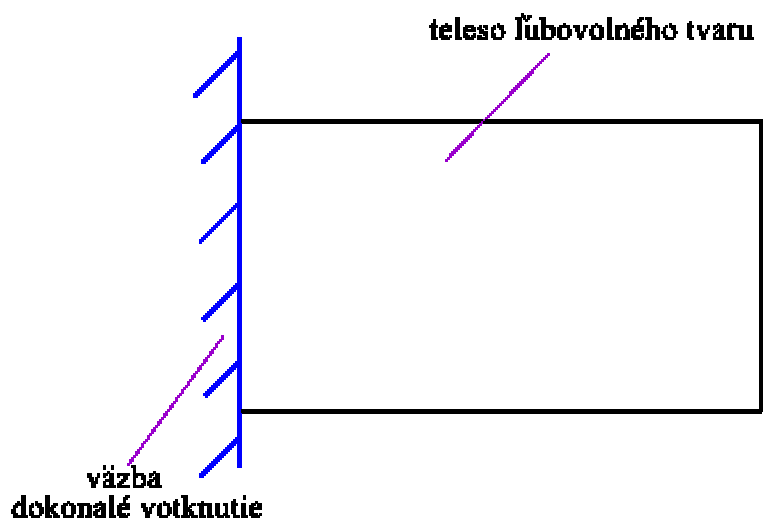
obr. 2.09

a5) Väzba odoberajúca $r=5^\circ$ voľnosti, čiže $i=6^\circ-5^\circ=1^\circ$ - teleso má jeden stupeň voľnosti pohybu. posuv v smere osi x .



obr. 2.10

a6) Vázba odoberajúca $r=6^\circ$ voľnosti, čiže $i=6^\circ-6^\circ=0^\circ$



obr. 2.11

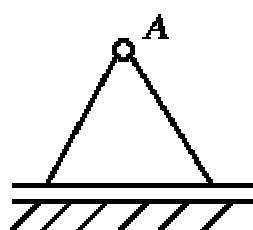
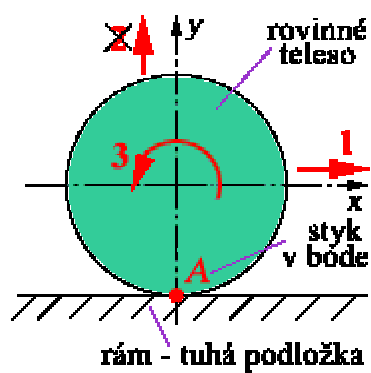
b) Rovinné úlohy

VÄZBA

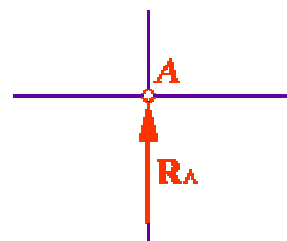
ZNAČKA

VÄZBOVÁ REAKCIA

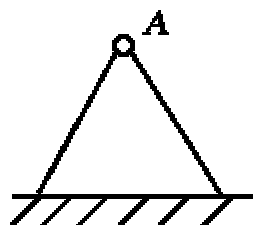
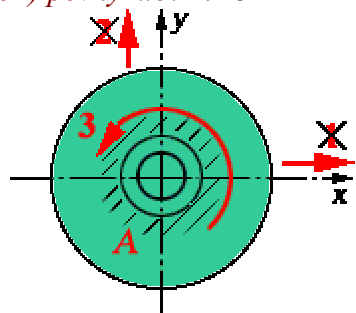
b1) posuvný klb: $i=3^\circ-1^\circ=2^\circ$ Vázba odoberá posuv v smere osi y .



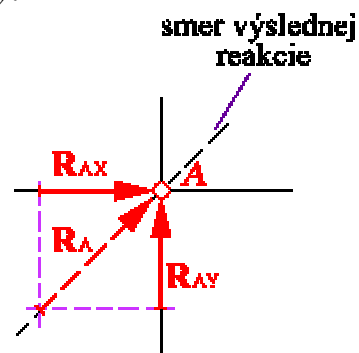
obr. 2.12



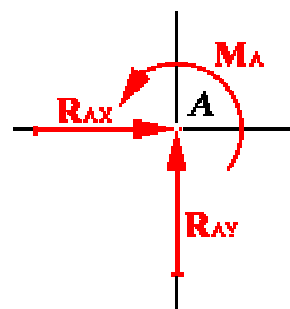
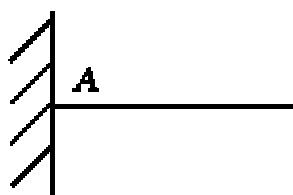
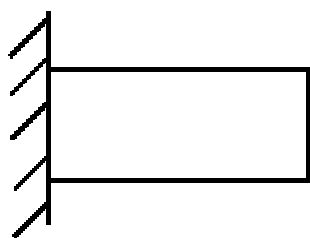
b2) pevný klb: $i=3^\circ-2^\circ=1^\circ$ Vázba odoberá posuv v smere osi x a y .



obr. 2.13



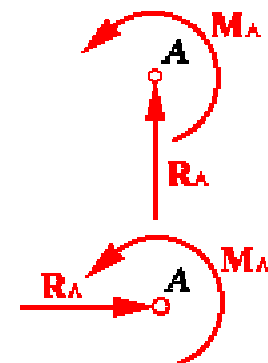
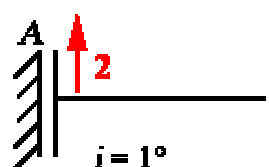
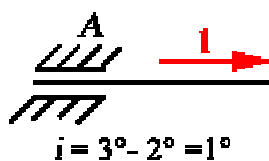
b3) dokonalé votknutie: $i=3^\circ-3^\circ=0^\circ$



obr. 2.14

c) Špeciálne väzby

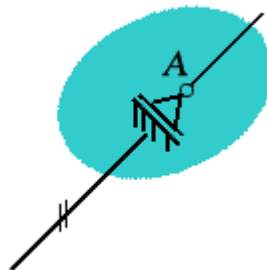
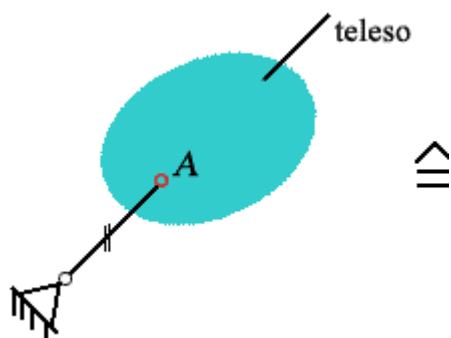
posuvné votknutie



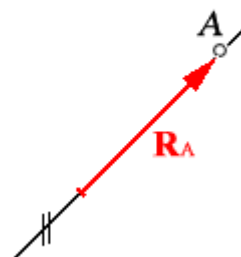
obr. 2.15

väzba prútom (lanom)

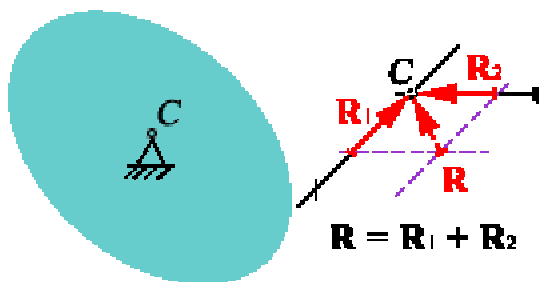
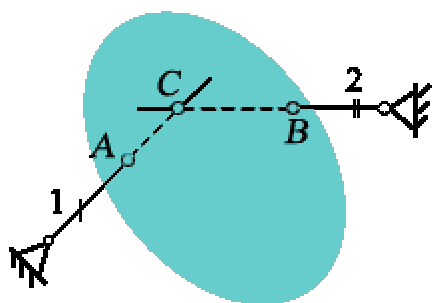
Odoberá jeden posuvný stupeň voľnosti v smere osi prúta. (lana). Jeden prút odoberá 1 stupeň voľnosti pohybu.



obr. 2.16



Dva prúty odoberajú dva stupne voľnosti.



obr. 2.17

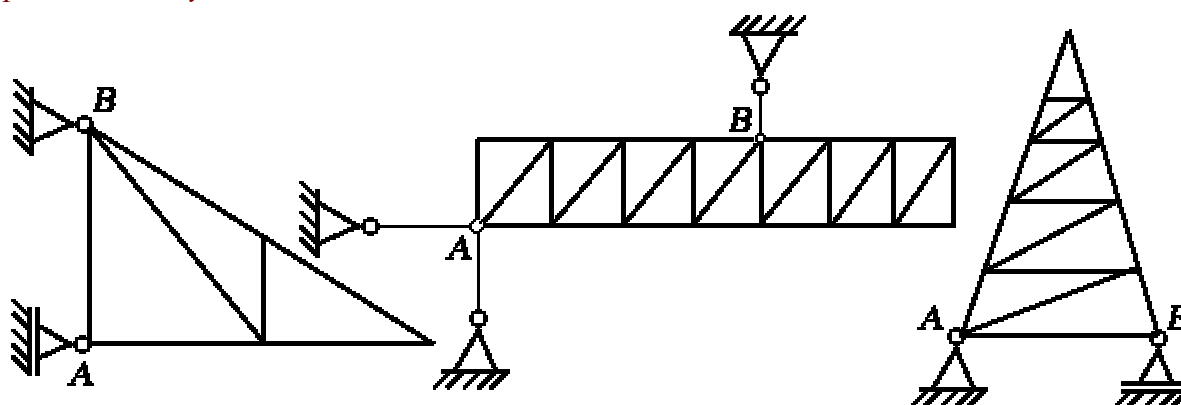
Poznámka: Každý pridaný prút odoberá ďalší stupeň voľnosti pohybu, jeho os však nesmie prechádzať spoločným priesečníkom osi dvoch predchádzajúcich prútov. Ako už bolo spomenuté, *upevnenie lanom je väzba jednosmerná*.

2.3.3 Príklady uloženia telesa

Stupne voľnosti sa telesu odoberajú kombináciou základných typov väzieb. Budeme predpokladať tzv. *ideálne väzby*, pri ktorých sa zanedbáva trenie a ich čiastočná poddajnosť. Pri veľmi presných výpočtoch je nutné túto neideálnosť väzieb zohľadniť, avšak pre väčšinu technických výpočtov je predpoklad ideálnej väzby prípustný.

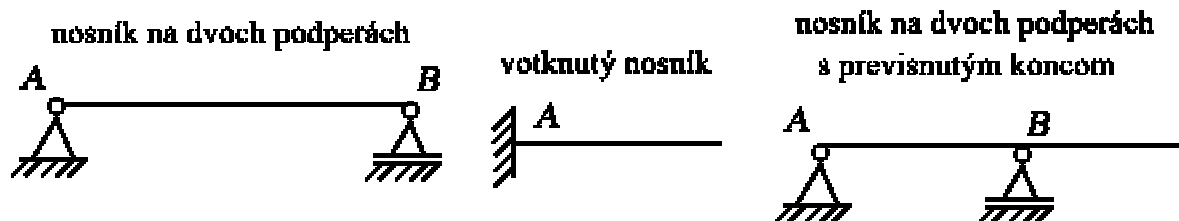
a) Staticky určité uloženie telesa v rovine: $i = n - r = 0^\circ$

a1) prútové sústavy



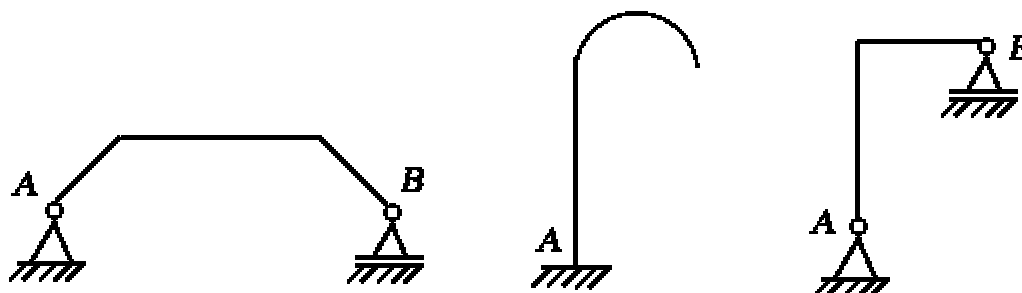
obr. 2.18

a2) nosníky



obr. 2.19

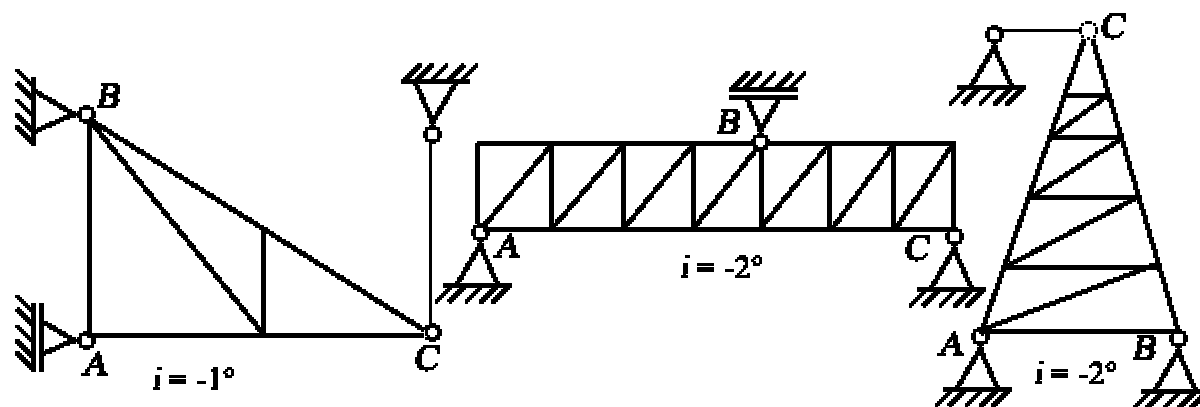
a3) lomené nosníky a zakrivené prúty



obr. 2.20

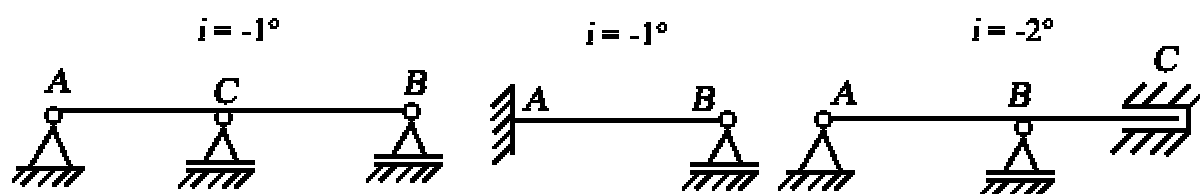
b) Staticky neurčité (preurčené) uloženie telesa v rovine: $i = n - r < 0^\circ$

b1) prútové sústavy



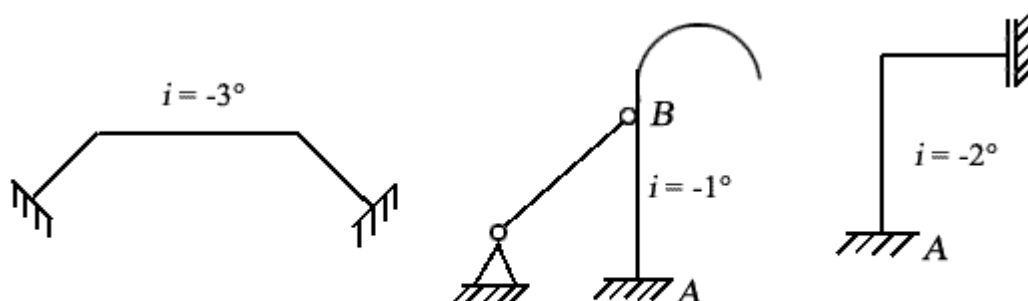
obr. 2.21

b2) nosníky



obr. 2.22

b3) lomené nosníky a zakrivené prúty



obr. 2.23

Poznámky:

Staticky určené uloženie zabezpečuje stabilné (tuhým pohybom nepohyblivé) upevnenie telesa. Pretože väzbové reakcie možno určiť zo statických podmienok rovnováhy, riešenie staticky určených úloh je jednoduché. Ako uvidíme neskôr, najväčšou výhodou tohoto uloženia je, že teplotné namáhanie vyskytujúce sa v silnoprúdových a energetických zariadeniach nespôsobuje vznik dodatočných vnútorných síl, ktoré môžu spôsobiť mechanické poškodenie konštrukcie. Staticky určená konštrukcia je však tuhostne poddajnejšia (vykazuje väčšie mechanické deformácie). **Staticky neurčité (preurčené) uloženie** spravidla vystužuje konštrukciu. Na statický výpočet však nepostačujú len statické podmienky rovnováhy, ale podľa stupňa statickej neurčitosti je ich nutné doplniť o tzv. **deformačné podmienky**. Statický výpočet týchto konštrukcií analytickými metódami je preto obtiažnejší. Použitie numerických

metód (napr. metóda konečných prvkov - MKP) však tento problém odstraňuje. Teplotné namáhanie (elektrické teplo, slnečné žiarenie, horúce pracovné médium) však predstavuje aj z hľadiska pevnosti konštrukcie nezanedbateľný nepriaznivý faktor.

2.4 ŠPECIÁLNE PRÍPADY STATICKEJ ROVNOVÁHY

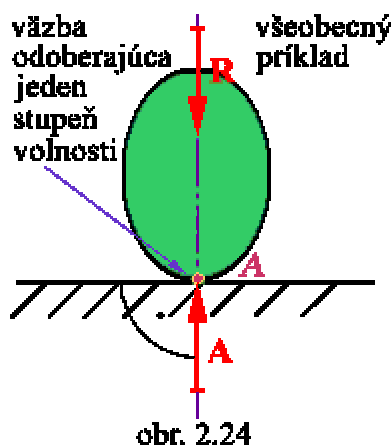
Dokonalé tuhé teleso uložené staticky určito, resp. neurčito (preurčene) sa pri zaťažení akýmikoľvek vonkajšími silami nepohybuje. Vonkajšie sily sú s väzbovými reakciami v statickej rovnováhe. Existujú však výnimky z tohto pravidla. Táto výnimka je spôsobená špeciálnou vonkajšou silovou sústavou, resp. špeciálnou kombináciou vonkajších väzieb.

a) Rovnováha staticky podurčene uloženého telesa

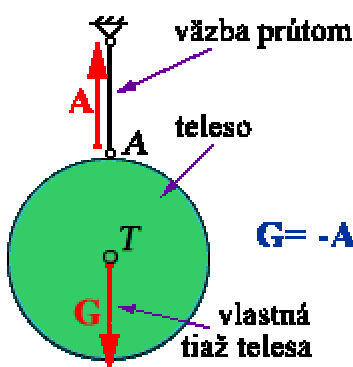
Teleso môže byť v statickej rovnováhe v prípade $n < r \Rightarrow i = n - r > 0^\circ$ vtedy, keď výslednica vonkajších síl pôsobí tak, že môže nastať statická rovnováha medzi ňou a výslednicou väzbových reakcií. Tento stav možno dokumentovať nasledovnými príkladmi:

a1) prípad uloženia: $n = 3^\circ$; $r = 1^\circ$; $i = 2^\circ$

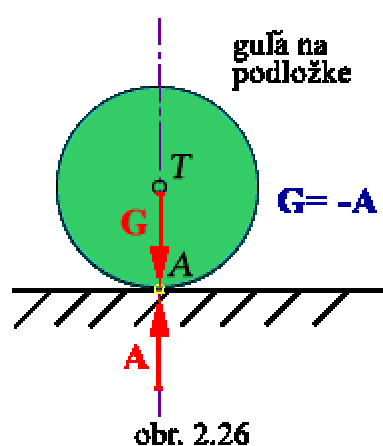
Telesu zostali v rovine dva stupne voľnosti. Výslednica vonkajších síl a väzbová reakcia ležia na spoločnej nositeľke, pričom platí: $\mathbf{R} = -\mathbf{A}$



obr. 2.24



obr. 2.25

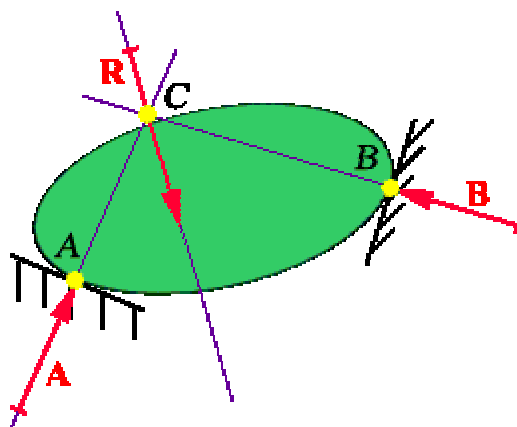


obr. 2.26

a2) prípad uloženia: $n = 3^\circ$; $r = 2^\circ$; $i = 1^\circ$

Teleso má odobraté dva stupne voľnosti pohybu dvoma prútmí, alebo dvoma bodovými stykmi, pričom nositeľky väzbových reakcií A a B sa pretínajú v bode C. Ak výslednica vonkajších síl R prechádza tým istým bodom, potom platí silová rovnica rovnováhy $\mathbf{R} + \mathbf{A} + \mathbf{B} + \dots = \mathbf{0}$ a teleso je v statickej rovnováhe.

Sily A, B a R tvoria centrálnu rovinnú rovnovážnu silovú sústavu.



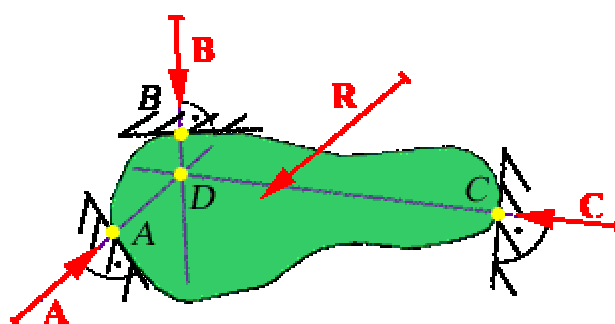
obr. 2.27

b) Statická nerovnováha staticky určito, resp. staticky neurčito (preurčene) uloženého telesa.

V dôsledku nesprávnej kombinácie väzieb je uloženie telesa nestabilné (teleso sa môže pohybovať). Zle zvolené väzby neplnia svoju funkciu - nazývajú sa *pasívne väzby*.

b1) prípad uloženia $n = 3^\circ$; $r = 3^\circ$; $i = 0^\circ$

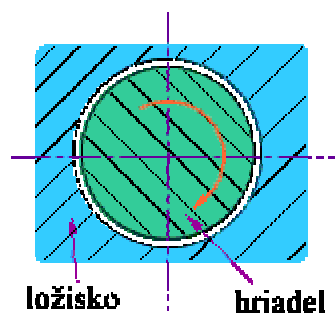
Teleso je uložené staticky určito tak, že nositeľky väzbových reakcií **A**, **B** a **C** sa pretínajú v bode **C**. Ak výslednica vonkajších síl **R** ide mimo bod **C**, teleso sa môže okolo bodu **D** virtuálne pootočiť.



obr. 2.28

Platí: $R + A + B + C + \dots = 0$

avšak $M \neq 0$



obr. 2.29

Pridaním ďalšej pasívnej väzby sa situácia nemení. Príkladom je uloženie hriadeľa točivého stroja v ložisku. Pasívne väzby sú cez styčné plochy hriadeľa a ložiska, vplyvom výslednej elektromagnetickej sily sa rotor v ložisku otáča. Špeciálne prípady uloženia sa však využívajú pri konštrukcii mechanizmov vykonávajúcich predpísaný pohyb (napr. pohony, roboty, mechatronické systémy, ...).

Poznámka:

Väzby treba voliť tak, aby vznikla stabilná rovnováha, t.j. aby nenastal prípad špeciálnej rovnováhy. V opačnom prípade každá zmena vonkajších síl spôsobí tuhý pohyb konštrukcií, ktorý je pri statických systémoch neprípustný.

2.5 VÝPOČET VÄZBOVÝCH REAKCIÍ STATICKY URČITÉHO ULOŽENIA

Postup výpočtu väzbových reakcií staticky určitých prípadov uloženia:

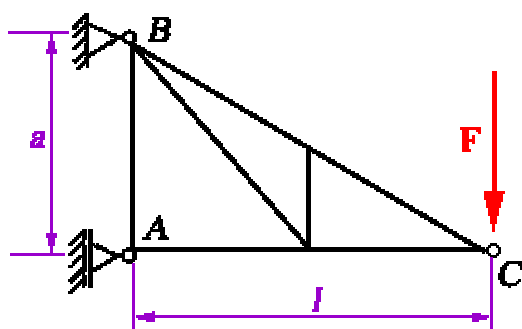
- 1) Odstránime všetky vonkajšie väzby a nahradíme ich väzbovými reakciami. Väzby vkladáme do uvoľnených bodov v smere odobratého stupňa voľnosti, resp. v smere osi zvoleného vzt'azného súradnicového systému, a orientujeme ich kladne, t.j. kladné väzbové sily sú orientované v zhode s orientáciou osi súradnicového systému a kladný väzbový moment v zmysle pravidla pravej ruky.
- 2) Pre uvoľnené teleso zostavíme statické podmienky rovnováhy (pre priestorovú úlohu 6 rovníc, pre rovinnú úlohu 3 rovnice), z ktorých vypočítame všetky väzbové reakcie. Ak z rovníc rovnováhy dostaneme väzbovú reakciu s kladným znamienkom, potom v skutočnosti pôsobí v tom zmysle (orientácia), ako sme ju do statického systému vložili. Ak väzbovú reakciu dostaneme so záporným znamienkom, v skutočnosti pôsobí v opačnom zmysle.

Poznámka: - Skúšku správnosti výpočtu väzbových reakcií treba vykonať pomocou ďalšej rovnice rovnováhy (napr. momentová podmienka rovnováhy k inému ľubovoľnému bodu telesa).

- Pri rovinných úlohách sa doporučujú používať prednostne momentové podmienky rovnováhy k bodu, kde pôsobia väzbové reakcie, a silové rovnice rovnováhy treba použiť na skúšku správnosti výpočtu.

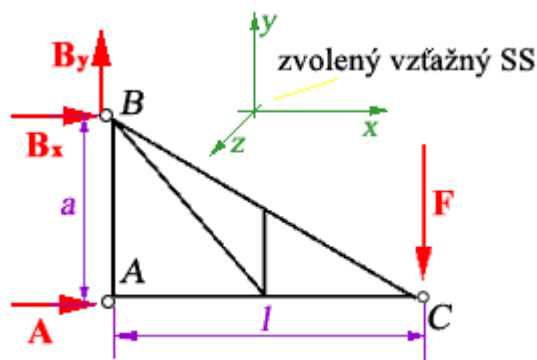
Príklad č. 2.1: Treba určiť väzbové reakcie v upevnení ramena stožiaru vn uloženého a zaťaženého silou F podľa obrázka.

Upevnené teleso ramena



obr. 2.30

Uvoľnené teleso ramena s vloženými väzbovými reakciami v kladnom zmysle



obr. 2.31

Statické podmienky rovnováhy (rovinná úloha)

Pre tri neznáme reakcie treba napísať tri rovnice rovnováhy.

Momentová rovnica rovnováhy k bodu A (momenty všetkých síl točia okolo osi z , kolmej na rovinu papiera):

$$1) \sum M_{iA} = 0: -Fl - B_x a = 0 \Rightarrow B_x = -F \frac{l}{a}$$

Momentová rovnica rovnováhy k bodu B :

$$2) \sum M_{iB} = 0: -Fl + Aa = 0 \Rightarrow A = F \frac{l}{a} = -B_x$$

Silová rovnica rovnováhy v smere osi y :

$$3) \sum F_y = 0: -F + B_y = 0 \Rightarrow B_y = F$$

Skúška správnosti:

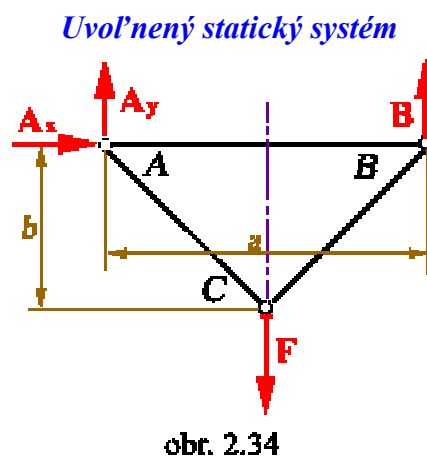
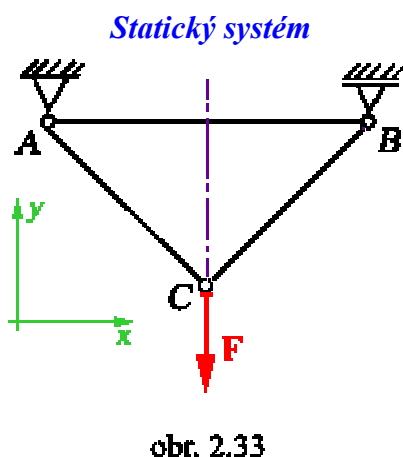
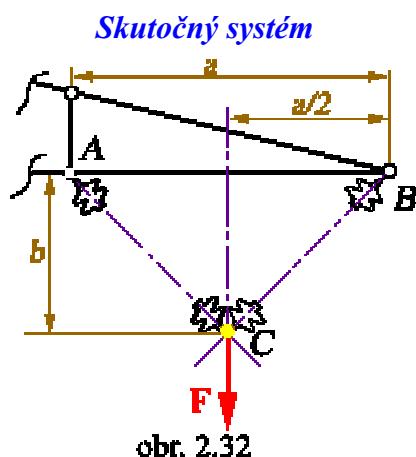
$$\sum F_{ix} = 0: A + B_x = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$\sum M_{iC} = 0: -B_y l - B_x a = 0$$

$$-Fl - \left(-F \frac{l}{a}\right)a = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Väzbové reakcie sú vypočítané správne. Reakcia B_x má v skutočnosti opačnú orientáciu, ako sme predpokladali.

Příklad č. 2.2: Treba určiť väzbové reakcie v uchyteniach izolátorov na rameno stožiaru.



Na výpočet väzbových reakcií možno použiť tieto tri rovnice rovnováhy:

$$1) \sum F_{ix} = 0: A_x = 0$$

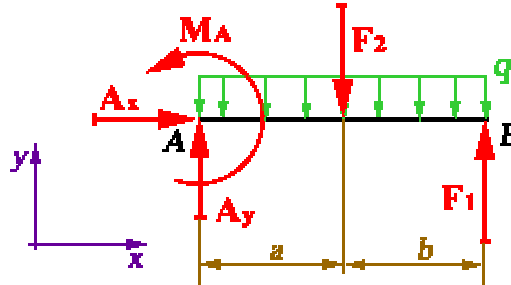
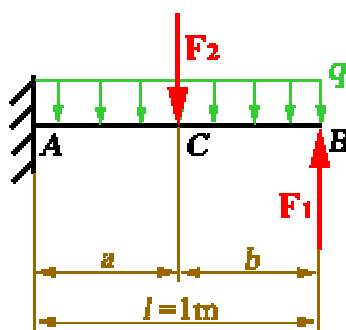
$$2) \sum M_{iB} = 0: -A_y a + F \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow A_y = \frac{F}{2}$$

$$3) \sum M_{iA} = 0: B a - F \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow B = \frac{F}{2} = A_y$$

Skúška správnosti:

$$\sum F_{iy} = 0: A_y + B - F = 0 \\ 0 = 0$$

Příklad č.2.3: Treba určiť väzbové reakcie v uložení votknutého nosníka.



Rovnice rovnováhy:

$$1) \sum M_{iA} = 0: F_1 l - q l \frac{l}{2} - F_2 a + M_A = 0$$

$$M_A = -F_1 l + q \frac{l^2}{2} + F_2 a$$

$$2) \sum F_{ix} = 0: A_x = 0$$

$$3) \sum F_{iy} = 0: A_y - F_2 - q l + F_1 = 0 \\ A_y = F_2 + q l - F_1$$

Skúška správnosti:

$$\sum M_{iB} = 0: M_A - A_y l + F_2 b + q l \frac{l}{2} = 0$$

$$\text{po dosadení: } 0 = 0$$

Poznámka: Ak na teleso pôsobí väčší počet rôznych vonkajších zaťažení, skutočnú orientáciu

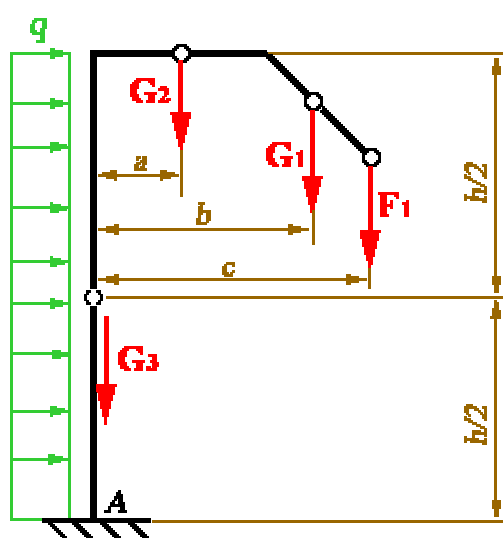
väzbových reakcií možno určiť až po dosadení konkrétnych hodnôt vonkajších síl. Ak napr. $F_1 = F_2 = F = 1000 \text{ N}$ a $q = F/l$ potom:

$$M_A = -Fl + \frac{F l^2}{2} + F \frac{l}{2} = F \left(-l + \frac{l}{2} + \frac{l}{2} \right) = 0$$

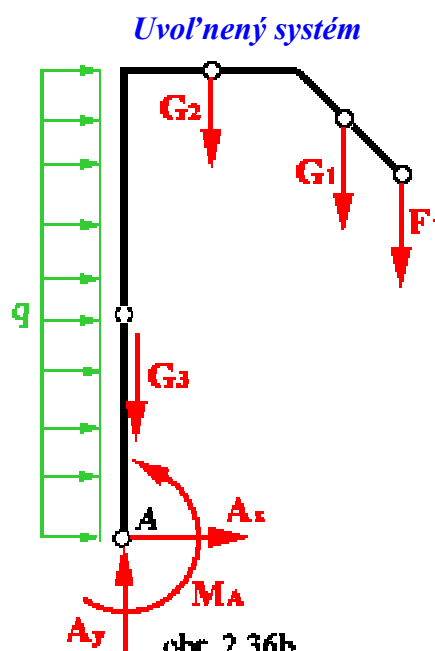
$$A_y = F + \frac{F}{l}l - F = F = 1000 \text{ N}$$

$$A_x = 0$$

Príklad č.2.4: Treba určiť väzbové reakcie v upevnení stĺpa pouličného osvetlenia zaťaženého podľa obrázku (F_1 - tiaž svietidla, G_1 , G_2 , G_3 - vlastná tiaž časti stĺpa, q - sila vetra).



obrázok 2.36a



obrázok 2.36b

Podmienky rovnováhy:

$$1) \sum M_{iA} = 0: -F_1 c - G_1 b - G_2 a - qh \frac{h}{2} + M_A = 0$$

$$M_A = F_1 c + G_1 b + G_2 a + q \frac{h^2}{2}$$

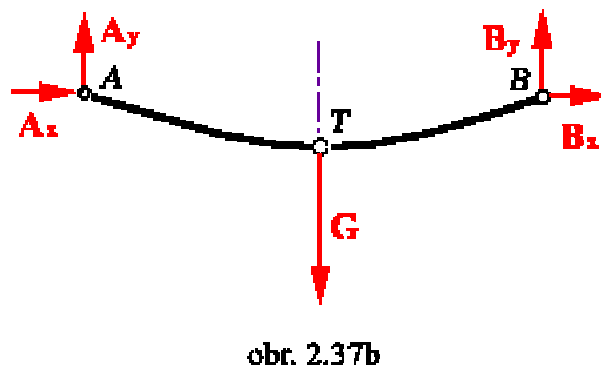
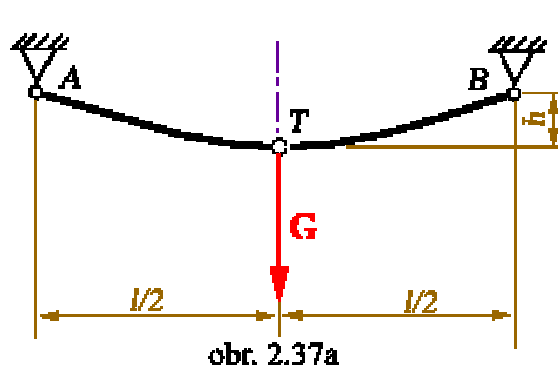
$$2) \sum F_{ix} = 0: A_x + qh = 0$$

$$A_x = -qh$$

$$3) \sum F_{iy} = 0: A_y - F_1 - G_1 - G_2 - G_3 = 0$$

$$A_y = F_1 + G_1 + G_2 + G_3$$

Príklad č.2.5: Treba určiť väzbové reakcie v uchyteníach vodiča vn, zaťaženého vlastnou tiažou sústredenej do ťažiska vodiča.



Statická určitost':

$$i = n - r = 3 - 4 = 1^\circ \gg \text{úloha je 1-krát staticky neurčitá.}$$

Podmienky rovnováhy:

$$1) \sum M_{iA} = 0: -G \frac{l}{2} + B_y l = 0$$

$$B_y = \frac{G}{2}$$

$$2) \sum F_{ix} = 0: A_x + B_x = 0$$

$$A_x = -B_x$$

$$3) \sum F_{iy} = 0: A_y + B_y - G = 0$$

$$A_y = B_y = \frac{G}{2}$$

Veľkosť reakcií A_x a B_x je závislá na tzv. *vnútorných silách*, ktorých výpočtom sa budeme zaoberať niekôr v rámci pružnosti a pevnosti materiálu. Statické podmienky nepostačujú na výpočet väzbových reakcií pri staticky neurčitom uložení telesa.

3. Statika sústavy hmotných bodov

Prúťové sústavy

Učebný cieľ kapitoly

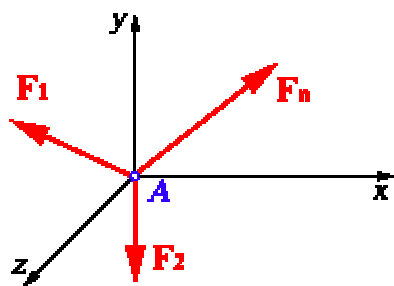
Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali ovládať:

- Rovnováhu sústavy hmotných bodov
- Riešiť prúťovku ako sústavu hmotných bodov
- Rozdelenie prúťových sústav
- Statickú určitosť prúťoviek
- Metódy statickej analýzy prúťoviek

3.1 ROVNOVÁHA SÚSTAVY HMOTNÝCH BODOV

Hmotný bod

je v statickej rovnováhe, keď výslednica síl pôsobiacich na hmotný bod je rovná nule.



obr. 3.01

Rovnováhu hmotného bodu možno vyjadriť statickými podmienkami rovnováhy:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$$

Skalárny tvar (zložkový) rovníc rovnováhy je:

a) v priestore

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

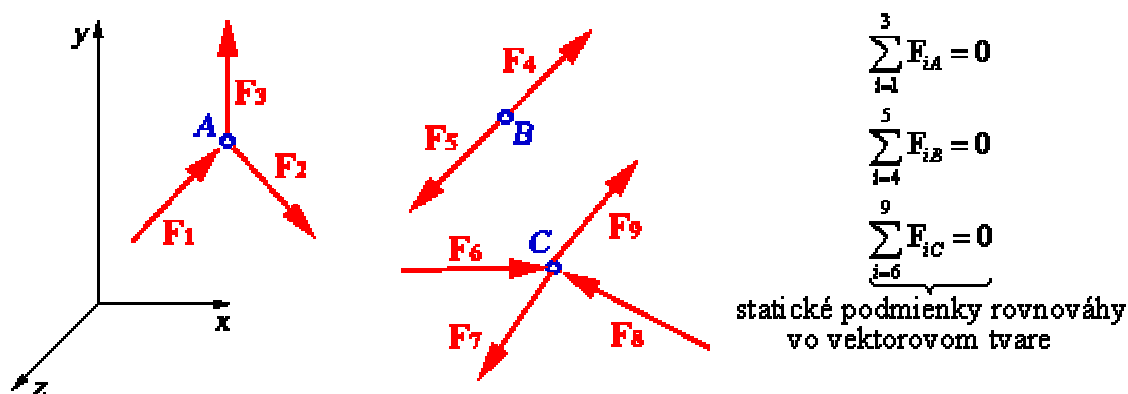
b) v rovine

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

Sústava hmotných bodov

(tvorená dvoma a viacerými hmotnými bodmi) je v statickej rovnováhe, keď je v statickej rovnováhe každý bod sústavy. Napr.: pre sústavu troch hmotných bodov platí:



obr. 3.02

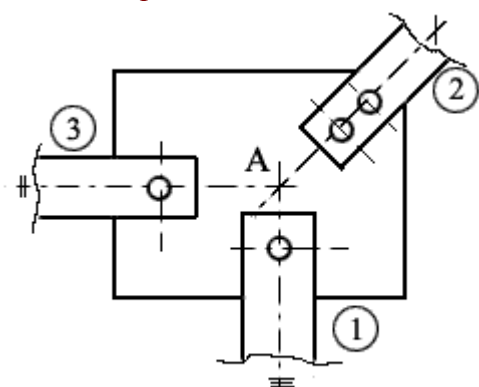
Rovnice rovnováhy v skalárnom tvare:

$$\begin{array}{lll} \sum F_{ixA} = 0 & \sum F_{iyA} = 0 & \sum F_{izA} = 0 \\ \sum F_{ixB} = 0 & \sum F_{iyB} = 0 & \sum F_{izB} = 0 \\ \sum F_{ixC} = 0 & \sum F_{iyC} = 0 & \sum F_{izC} = 0 \end{array}$$

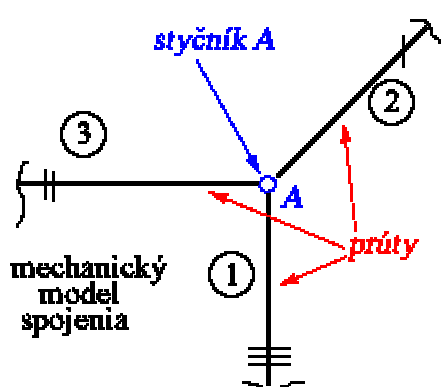
3.2 PRÚTOVKA AKO SÚSTAVA HMOTNÝCH BODOV

Prúťová sústava vznikne spojením viacerých *prútov* (tyčí) v spoločných bodoch - styčníkoch. Prierezová plocha prútov môže byť rôzna a po dĺžke prúta je spravidla konštantná. Za predpokladu, že styčníky predstavujú rotačné kĺby bez trenia, prúty prenášajú len osovú vnútornú silu. Tento predpoklad je vyhovujúci, ak dĺžka prúta v porovnaní s jeho prierezovou plochou je výrazne prevažujúcim rozmerom prúta. Potom je možné skutočné spojenie prútov (skrutkový spoj, zvarovaný spoj, nitovaný spoj, a iné) považovať za tzv. *ideálne kĺby*. Príklady prúťoviek: stožiare Vn, osvetľovacie veže a rampy, nosníky a stĺpy v rozvodniach a transformačných staniciach, anténne systémy, a pod.

a) spojenie troch prútov

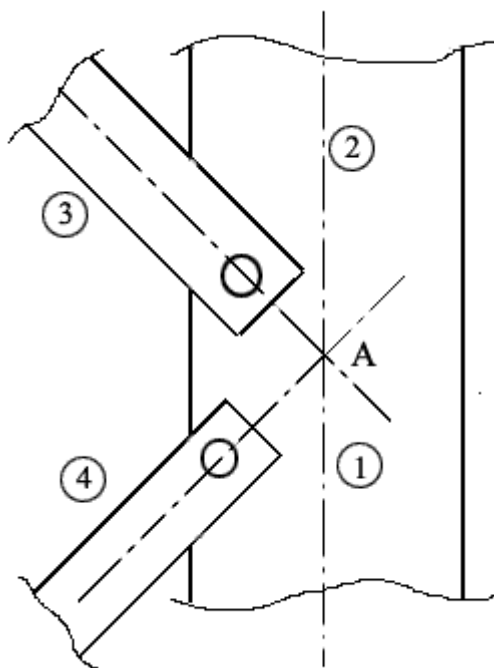


obr. 3.3

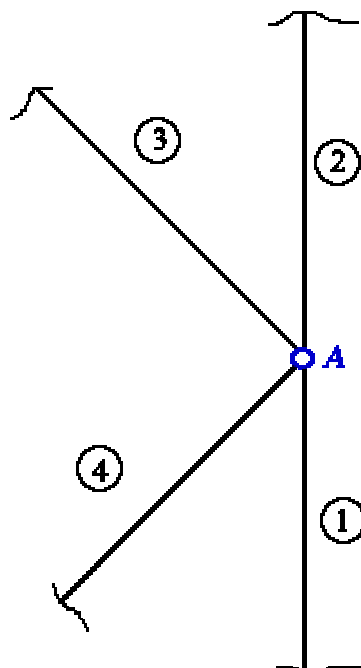


obr. 3.4

b) spojenie štyroch prútov



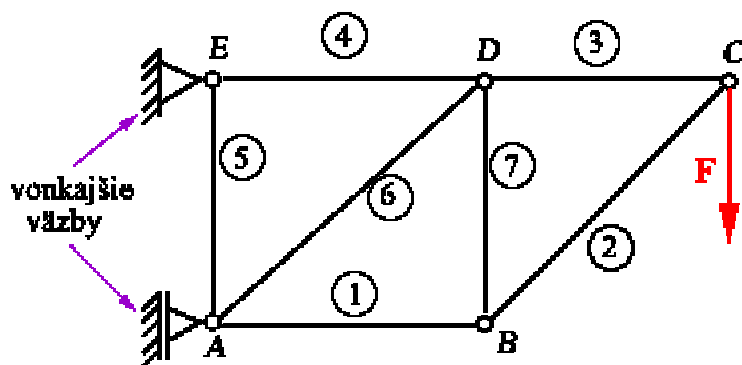
obr. 3.5



obr. 3.6

Mechanický model rovinatej prútovej sústavy

Rovinná prútová sústava: všetky prúty i vonkajšie sily ležia v jednej rovine. Prúty predstavujú vnútorné väzby medzi styčníkmi (hmotnými bodmi).



obr. 3.7

Predpoklad pre zaťaženie

Prútovka je zaťažená len sústredenými silami s pôsobiskom v styčníkoch. Spojité zaťaženia, ako je vlastná tiaž, sila vetra, tiaž námrazy atď., je preto potrebné ekvivalentne pretransformovať do sústredených síl pôsobiacich v styčníkoch.

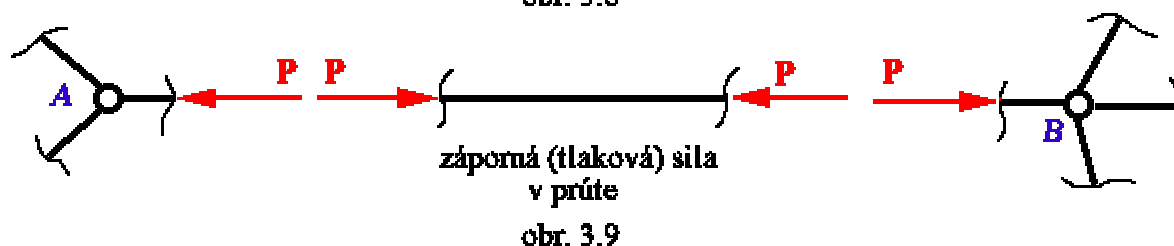
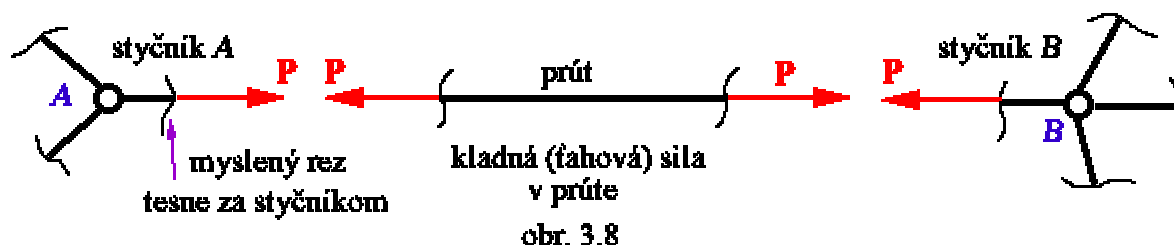
Predpoklad pre prúty

Prúty predstavujú vnútornú väzbu medzi dvoma hmotnými bodmi - styčníkmi. Tieto väzby odoberajú hmotnému bodu jeden stupeň voľnosti pohybu v smere osi prúta. Ak odstránime vnútorné väzby medzi hmotnými bodmi, musíme ich nahradiť vnútornými väzbovými reakciami, ktoré sa nazývajú *osové sily* v prútoch a označujú sa písmenom P_i , kde i je číslo prúta.

Predpoklad pre osovú silu v prútoch

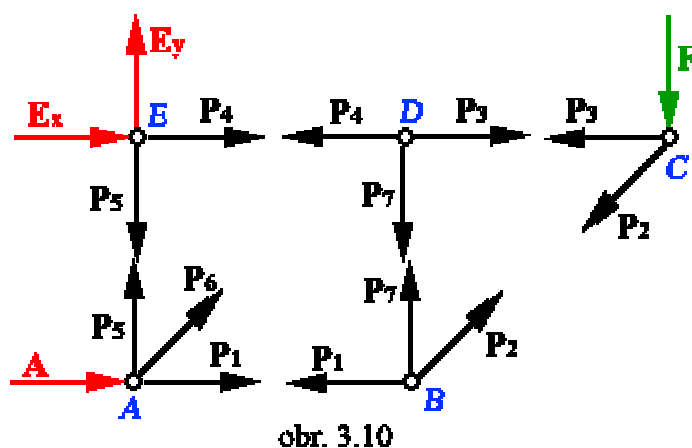
Prúty sústavy sú namáhané osovými silami na ťah, alebo tlak. Ich veľkosť a orientácia je závislá na geometrii prútovej sústavy, zaťažujúcich vonkajších silách a uložení prútovky prostredníctvom vonkajších väzieb.

Kladná osová sila (ťah) je orientovaná von z mysleného rezu prúta, resp. von zo styčníka. Záporná osová sila (tlak) je orientovaná v zmysle do mysleného rezu, resp. do styčníka.



Odstránením prútov a ich náhradou osovými silami (pri výpočtoch budeme vždy predpokladať kladnú osovú silu v prúte), ako aj odstránením vonkajších väzieb a ich náhradou vonkajšími väzbovými reakciami, dostaneme sústavu hmotných bodov v rovine:

Sústava hmotných bodov



Táto sústava je v statickej rovnováhe, ak je v rovnováhe každý hmotný bod, t.j. keď sú splnené statické podmienky rovnováhy (vektorové rovnice):

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F}_{iA} = 0 &: \mathbf{A} + \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_5 + \mathbf{P}_6 = 0 \\ \sum \mathbf{F}_{iB} = 0 &: \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_7 = 0 \\ \sum \mathbf{F}_{iC} = 0 &: \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{F} = 0 \\ \sum \mathbf{F}_{iD} = 0 &: \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 + \mathbf{P}_7 = 0 \\ \sum \mathbf{F}_{iE} = 0 &: \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y + \mathbf{P}_4 + \mathbf{P}_5 = 0\end{aligned}$$

Ak tieto vektorové rovnice rovnováhy rozpišeme do zložkového tvaru, dostaneme desať skalárnych rovníc pre výpočet desiatich neznámych síl (7 osových síl P_1 až P_7 a troch väzbových reakcií E_x , E_y a A).

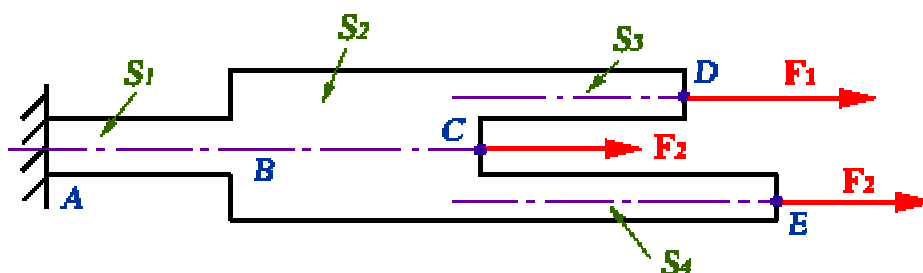
3.3 ROZDELENIE PRÚTOVÝCH SÚSTAV

Podľa geometrie prútovky a jej zaťaženia rozoznávame:

- jednoosové (jednorozmerné) prútovky
- rovinné prútovky
- priestorové prútovky

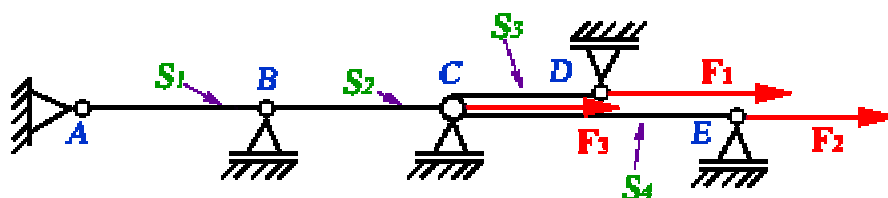
Jednorozmerná prútočka

obsahuje prúty s paralelnými osami, pričom zaťažujúce sily pôsobia v smere osi prútov.



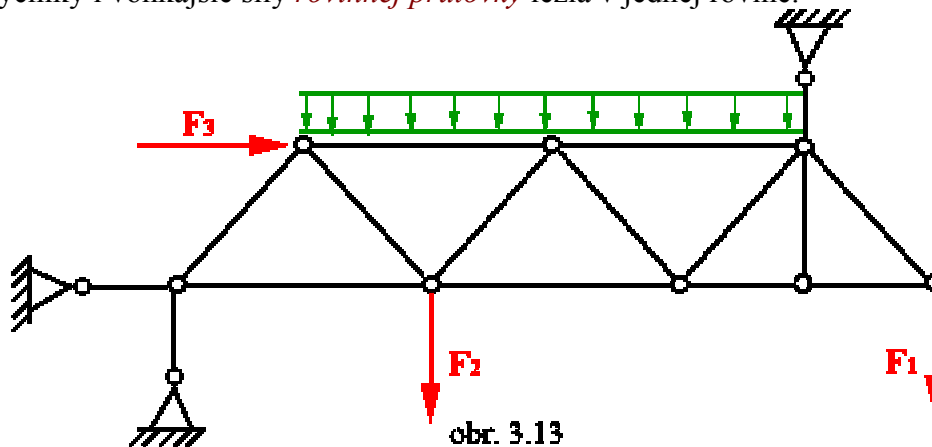
obr. 3.11

Ak dĺžka jednotlivých častí tiaha na obr.3.11 je dominantným rozmerom oproti ich prierezovej ploche, potom ju možno nahradiť mechanickým modelom jednoosovej prútočky (obr.3.12).



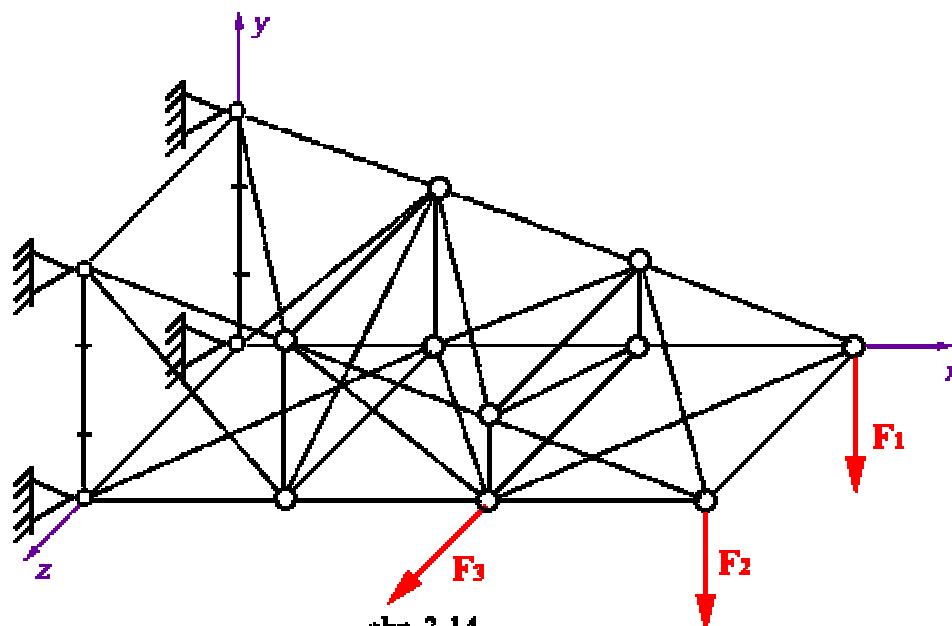
obr. 3.12

Prúty, styčníky i vonkajšie sily *rovinnej prútočky* ležia v jednej rovine.



obr. 3.13

Prúty, styčníky i vonkajšie sily *priestorovej prútočky* sú všeobecne rozptýlené v priestore.



obr. 3.14

Špeciálne priestorové prútočky, ktorej prúty ležia vo vzájomne na seba kolmých rovinách možno rozložiť na rovinné prútové sústavy. Prúty v každej z rovín sústavy prenášajú silové účinky síl ležiacich v tej istej rovine. Tým možno riešenie špeciálnej priestorovej prútočky rozložiť na riešenie viacerých rovinných úloh. V ďalšej časti učebnice sa budeme zaoberať výlučne rovinnými prútočnými sústavami.

3.4 STATICKÁ URČITOSŤ PRÚTOVIEK

Statická analýza rovinných prútočiek závisí aj od statickej určitosti úlohy. Pri prútočkách rozlišujeme medzi *vonkajšou* a *vnútornou* statickou určitosťou. Prútočná sústava je *staticky určitá*, ak je staticky určitou sústavou tak po vnútornej ako aj po vonkajšej stránke. V opačnom prípade pôjde o *staticky neurčitú* (preurčenú, resp. podurčenú) prútočku.

Vonkajšia statická určitosť i_{vo} je závislá od počtu odobraných stupňov voľnosti celej prútočky (ako jednému telesu) vonkajšími väzbami, a vypočítame ju podľa vzťahu $i_{vo} = 3 - n$, kde n je počet stupňov voľnosti pohybu odobratých vonkajšími väzbami. Prútočka je uložená po vonkajšej stránke staticky určito, ak $i_{vo} = 0$. V opačnom prípade ide o staticky neurčité uloženie. Z hľadiska statiky prútočky je nutné odobrať minimálne tri stupne voľnosti aktívnymi väzbami.

Vnútnu statickú určitosť možno stanoviť zo vzťahu: $i_{vn} = 3p - 2(nk_n + \dots + 4k_4 + 3k_3 + 2k_2 + k_1)$, kde p je počet prútov sústavy, k_n je počet styčníc určitého typu:

k_1 - jednoduchý styčník - v styčníku sa spájajú dva prúty

k_2 - dvojnásobný styčník - v styčníku sa spájajú tri prúty

k_n - n -násobný styčník - styčníku sa spája $(n+1)$ prútov

Rozlišujú sa tri prípady:

$i_{vn} = 3$ - staticky určitá úloha

$i_{vn} < 3$ - staticky neurčitá (preurčená) úloha

$i_{vn} > 3$ - staticky neurčitá (podurčená) úloha t.j. prútočná sústava je vnútorne pohyblivá (je mechanizmom)

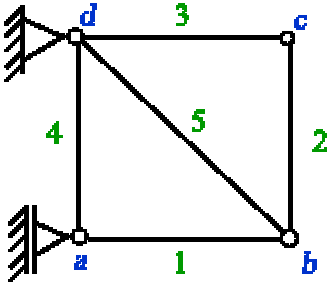
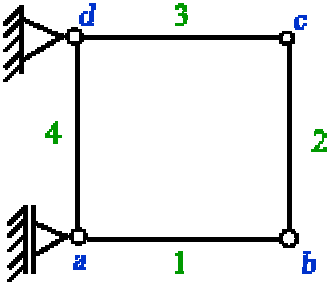
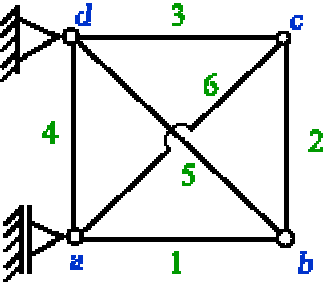
Rovinná prútočná sústava je staticky určitá, keď $i_{vo} = 0$ a $i_{vn} = 3$.

Ak je prútočná sústava staticky určitá, na výpočet osových síl a vonkajších väzbových reakcií postačujú statické podmienky rovnováhy. Teplotné namáhanie, poddajnosť vonkajších väzieb

ako aj výrobná nepresnosť nespôsobujú na rozdiel od staticky neurčitých úloh vznik vnútorných síl a väzbových reakcií. Pri staticky neurčitých prútovkách musíme statické podmienky rovnováhy doplniť deformačnými podmienkami. Veľkosť osových síl v staticky neurčitej prútovke je teda závislá aj na veľkosti priereзов jednotlivých prútov.

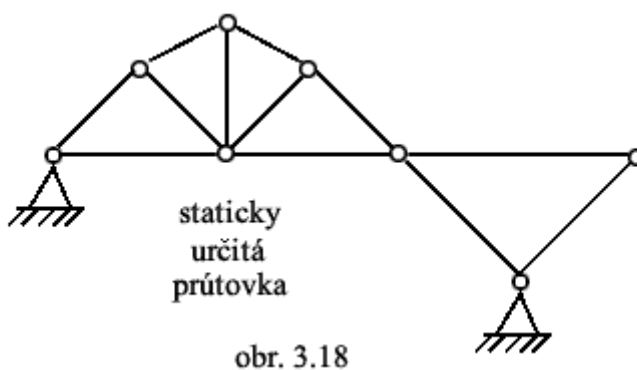
Príklad:

Vypočítajte statickú určitosť prútoviek podľa obrázku.

 obr. 3.15	 obr. 3.16	 obr. 3.17
$i_{vo} = 3 - 2 - 1 = 0$ $i_{vn} = 3 \cdot 5 - 2(2 \cdot 2 + 2) = 15 - 12 = 3$ - staticky určitá úloha	$i_{vo} = 3 - 3 = 0$ $i_{vn} = 3 \cdot 4 - 2(4) = 12 - 8 = 4$ $i_{vn} > 3$ - prútovka je pohyblivá (mechanizmus s jedným stupňom voľnosti pohybu)	$i_{vo} = 0$ $i_{vn} = 3 \cdot 6 - 2(2 \cdot 4) = 18 - 16 = 2$ $i_{vn} < 3$ - staticky neurčitá úloha (jeden krát)

Pravidlo:

Rovinná prútovka je po vnútornej stránke staticky určitá, ak jej tvar je tvorený spojením prútov do trojuholníka.



3.5 METÓDY STATICKEJ ANALÝZY PRÚTOVIEK

Metódami statiky možno riešiť len staticky určité prútové sústavy. Týmto metódami možno určiť vonkajšie väzbové reakcie a vnútorné sily v prútoch. Na výpočet deformácie prútoviek, a tým aj na analýzu staticky neurčitých úloh je potrebné použiť vzťahy z oblasti pružnosti a pevnosti materiálu. V ďalšom sa preto v rámci statiky budeme zaoberať riešením len staticky určitých prútoviek. Cieľom riešenia bude výpočet *statickej určitosti, vonkajších väzbových reakcií a osových síl v prúte*. V ďalších kapitolách sa budeme zaoberať výpočtom *deformácie* prútoviek ako aj riešením *staticky neurčitých* úloh.

Metódy riešenia prútoviek sa všeobecne delia na:

- a. analytické
- b. vektorové (grafické)
- c. numerické (počítačovo orientované)

Každá skupina týchto metód obsahuje viacero konkrétnych postupov riešenia. Nástup počítačov urýchlil prudký rozvoj numerických metód mechaniky. Prednosti numerických metód, napr. metóda konečných prvkov (MKP), posunuli do úzadia v minulosti veľmi často používané grafické metódy (napr. Cremonov plán, Wiliottov plán, atď.), ktoré sa v súčasnosti takmer prakticky nepoužívajú. Kvôli fyzikálnej podstate problému uvedieme v ďalšom dve najpoužívanejšie analytické metódy riešenia statiky prútových sústav, a sice *styčnickovú* a *priesečnú metódu*. Tieto metódy možno výhodne použiť na kontrolu výsledkov získaných počítačovo orientovanými metódami.

3.5.1 Styčnicková metóda

Princíp metódy

vychádza z podmienok rovnováhy sústavy hmotných bodov. Hmotný bod = uvoľnený styčník, v ktorom pôsobia známe vonkajšie sily a vonkajšie väzbové reakcie, ako aj neznáme osovú sily styčníkom spojených prútov.

1. Odstránime vonkajšie väzby a z podmienok rovnováhy celej prútovky vypočítame vonkajšie väzbové reakcie
2. Z podmienok rovnováhy síl uvoľneného styčníka vypočítame neznáme osovú sily.

Poznámka:

Pri riešení rovnováhy vychádzame zo styčníka, v ktorom pôsobia vonkajšie sily (alebo známe vonkajšie reakcie), a maximálne dve neznáme osovú sily.

Príklad:

Vypočítajte statickú určitosť, väzbové reakcie ako aj osovú sily v prútoch.

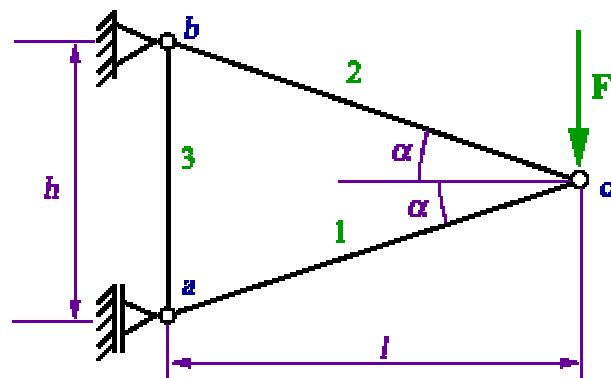
Dané je: sila F , uhol α , rozmery h, l

a) *statická určitosť*

$$i_{vo} = 3 - 3 = 0$$

$$i_{vn} = 3 \cdot 3 - 2(3) = 3$$

- prútovka je staticky určitá



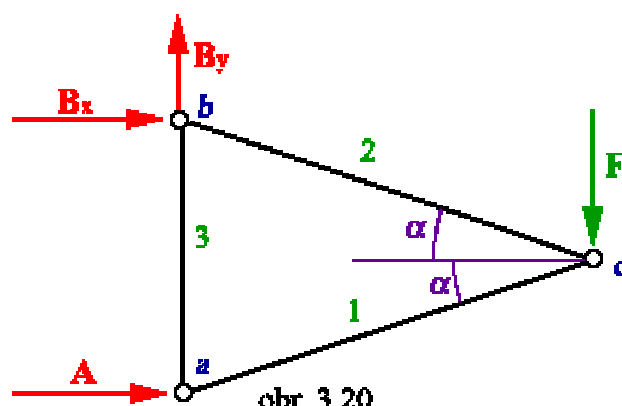
obr. 3.19

b) *vonkajšie väzbové reakcie*

$$\sum F_y = 0: B_y - F = 0 \rightarrow B_y = F$$

$$\sum M_b = 0: Ah - Fl = 0 \rightarrow A = F \frac{l}{h}$$

$$\sum F_x = 0: B_x + A = 0 \rightarrow B_x = -A = -F \frac{l}{h}$$



obr. 3.20

c) *osové sily*

rovnováha styčníka c:

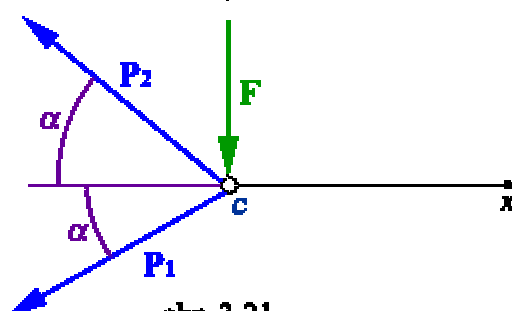
$$\sum F_x = 0: -P_2 \cos \alpha - P_1 \cos \alpha = 0$$

$$P_2 = -P_1 = P$$

$$\sum F_y = 0: -F + P_2 \sin \alpha - P_1 \sin \alpha = 0$$

$$-F + 2P \sin \alpha = 0$$

$$P = \frac{F}{2 \sin \alpha} = P_2 = -P_1$$



obr. 3.21

rovnováha styčníka a:

$$\sum F_y = 0: P_3 + P_1 \sin \alpha = 0$$

$$P_3 = -P_1 \sin \alpha = +\frac{F}{2}$$

$$\sum F_x = 0: A + P_1 \cos \alpha = 0$$

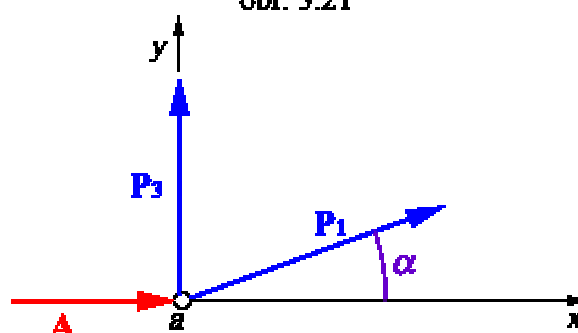
$$F \frac{l}{h} - F \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha} = 0$$

Pričom: $\cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{l}{h/2}$

Záver: $P_1 = -\frac{F}{2 \sin \alpha} \rightarrow$ v prúte je tlak

$P_2 = +\frac{F}{2 \sin \alpha} \rightarrow$ v prúte je ťah

$P_3 = +\frac{F}{2} \rightarrow$ v prúte je ťah



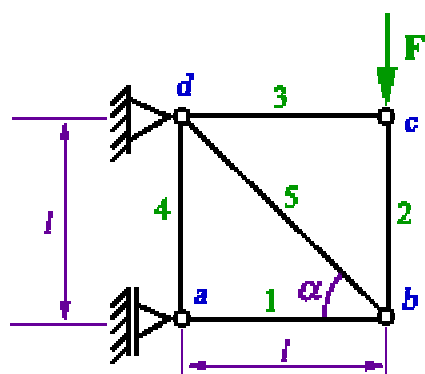
obr. 3.22

Príklad:

Vypočítajte osovú sily v prútoch. Dané je: F, l .

a) *statická určitost:*

$i_{vo}=0$, $i_{vn}=3.5-2(2.2+2)=3$ - prútočka je staticky určitá



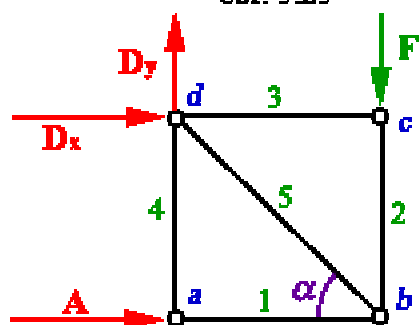
obr. 3.23

b) *vonkajšie väzbové reakcie:*

$$\sum F_y = 0: D_y = F$$

$$\sum M_{id} = 0: A = F$$

$$\sum F_x = 0: D_x = -A = -F$$



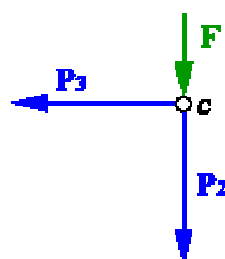
obr. 3.24

c) *osové sily:*

rovnováha styčníka c

$$\sum F_x = 0: P_3 = 0$$

$$\sum F_y = 0: P_2 = -F$$



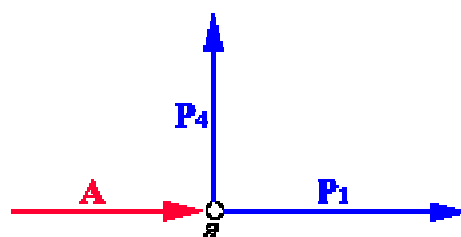
obr. 3.25

rovnováha styčníka a

$$\sum F_x = 0: P_1 + A = 0$$

$$P_1 = -A = -F$$

$$\sum F_y = 0: P_4 = 0$$



obr. 3.26

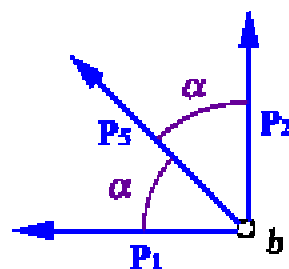
rovnováha styčníka b

$$\sum F_{ix} = 0: -P_1 - P_3 \cos \alpha = 0$$

$$P_3 = -\frac{P_1}{\cos \alpha} = +\sqrt{2}F$$

$$\sum F_{iy} = 0: P_2 + P_3 \cos \alpha = 0$$

$$P_2 = -P_3 \cos \alpha = -F$$



obr. 3.27

d) *zhrnutie výsledkov*

Prút číslo	Osová sila P_i
1	$-F$
2	$-F$
3	0
4	0
5	$\sqrt{2}F$

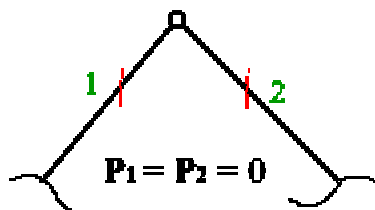
Najviac namáhaný (na ťah) je prút č.5

Poznámka:

Prútom, v ktorých je nulová sila sa hovorí *nulové prúty*. Aj keď tieto prúty nie sú namáhané pre daný zaťažovací stav, musia byť v prútovej sústave prítomné, pretože držia tvar prútovej sústavy.

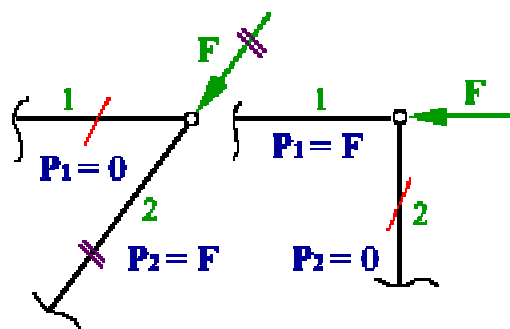
Prípady nulových prútov (nulové prúty sú označené šikmou čiarou):

- dva prúty spojené v nezaťaženom styčníku



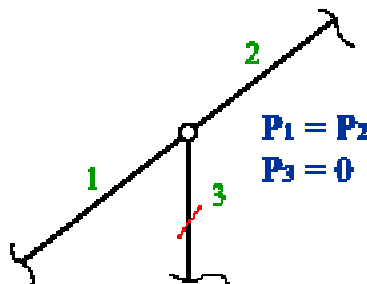
obr. 3.28

- dva prúty zaťažené silou ležiacej na osi niektorého prúta



obr. 3.29

- tri prúty spojené v nezaťaženom styčníku, pričom osi dvoch prútov sú totožné



obr. 3.30

3.5.2 Priesečná metóda (Ritterov rez)

Princíp metódy

vychádza z momentových podmienok statickej rovnováhy telesa, resp. jeho jednej odrezanej časti mysleným rezom cez maximálne tri prúty nepretínajúce sa v jednom bode. Vložené osovú sily musia byť v rovnováhe s vonkajšími silami pôsobiacimi na odrezanú časť prútovky. Momentové podmienky rovnováhy odrezanej časti prútovky treba písať k bodom, ktoré sú priesečníkom osi dvoch prerezaných prútov. V niektorých úlohách takáto možnosť neexistuje, v takom prípade treba použiť silové podmienky rovnováhy.

Příklad: Vypočítajte sily P_1 , P_3 a P_5 , keď je dané: $F = 5 \text{ kN}$, $a = 3 \text{ m}$

a) *statická určitost'*:

$i_{vo} = 0$; $i_{vn} = 3$ - prútovka je staticky určitá

b) *väzbové reakcie:*

$$\sum F_{ix} = 0: A_x = 0$$

$$\sum M_{iz} = 0: F \cdot 2a - B \cdot a = 0$$

$$B = 2F$$

$$\sum B_{iy} = 0: A_y \cdot a + F \cdot a = 0$$

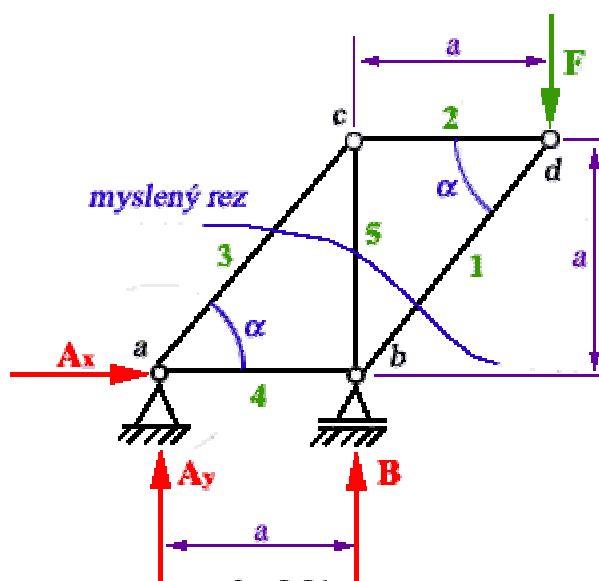
$$A_y = -F$$

c) *Skúška správnosti:*

$$\sum F_{iy} = 0: A + B - F = 0$$

$$0 = 0$$

d) *osové sily:*



obr. 3.31

Prútovku rozrežeme myslenným rezom na dve časti. Osové sily P_1 , P_3 , P_5 možno vypočítať zo statických podmienok rovnováhy jednej z odrezanej časti (treba si zvoliť jednoduchšiu časť prútovky). Tu je výhodnejšia pravá časť prútovky, do rezov vložíme kladné osové sily.

Z momentovej podmienky k bodu C , v ktorom sa pretínajú nositeľky síl P_3 a P_5 možno určiť silu P_1 :

$$\sum M_c = 0: \quad -F \cdot a - P_1 \cdot p_1 = 0$$

$$P_1 = -F \frac{a}{p_1}$$

Rameno sily P_1 : $p_1 = a \cdot \sin \alpha$

$$P_1 = -F \cdot \sin \alpha$$

Z momentovej podmienky rovnováhy k bodu b možno určiť silu P_3 :

$$\sum M_b = 0: \quad -F \cdot a + P_3 \cdot p_3 = 0$$

$$P_3 = F \frac{a}{p_3}$$

Rameno sily $p_3 = p_1 = a \cdot \sin \alpha$

$$P_3 = F \cdot \sin \alpha = -P_1$$

Keďže sily P_3 a P_1 sa pretínajú v nekonečne, na výpočet sily P_5 musíme použiť rovnicu rovnováhy síl:

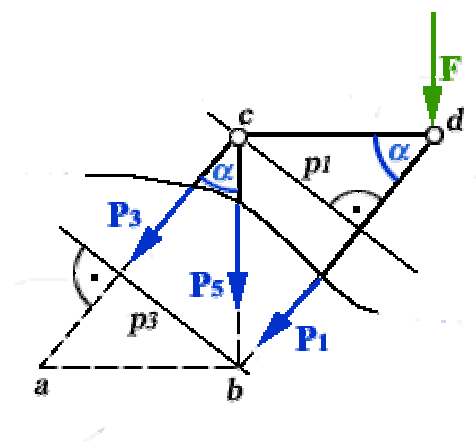
$$\sum F_y = 0: \quad -P_3 \cdot \cos \alpha - P_1 \cdot \sin \alpha - P_5 - F = 0$$

$$P_5 = F + P_3 \cdot \cos \alpha + P_1 \cdot \cos \alpha = -F$$

Záver:

Prúty č.1 a 5 sú tlačené, prút č.3 je namáhaný na ťah silami:

$$P_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F \doteq -3,535 \text{ kN} \quad ; \quad P_3 = 3,535 \text{ kN} \quad ; \quad P_5 = -5 \text{ kN}$$



obr. 3.32

Príklad: Vypočítajte silu P_4 . Dané je: F, h

a) *statická určitost:*

$$i_{v0} = 3 - 2 - 1 = 0$$

$$i_{vn} = 3 \cdot 7 - 2(1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 3$$

- prúťovka je staticky určitá

b) *väzbové reakcie:*

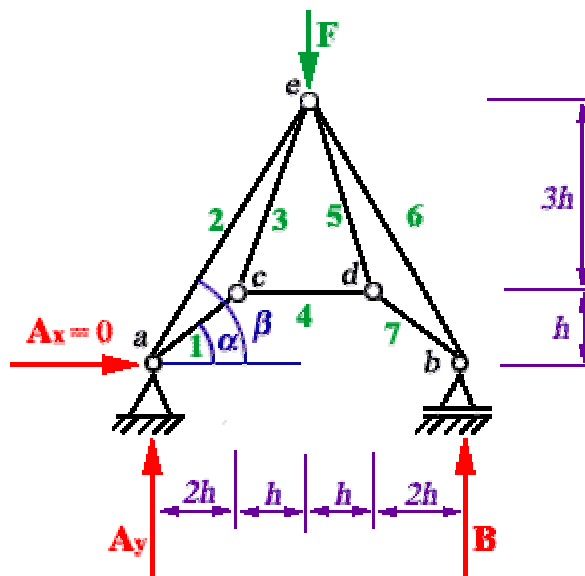
$$\sum F_{ix} = 0: A_x = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0: A_y + B - F = 0$$

$$A_y = F - B$$

$$\sum M_{ia} = 0: B \cdot 6h - F \cdot 3h = 0$$

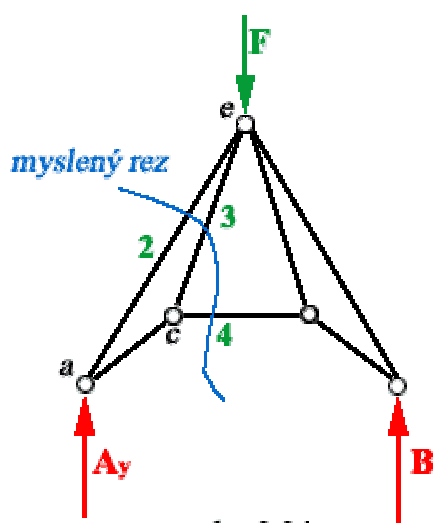
$$B = \frac{F}{2} = A_y$$



obr. 3.33

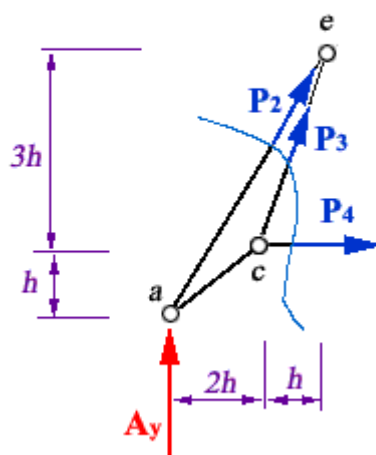
c) *osová sila P_4 :*

Mysleným rezom cez prúty 2, 3 a 4 rozdelíme teleso na dve časti. Hľadané osovú silu určíme napr. z podmienok ľavej odrezanej časti telesa.



obr. 3.34

Odrezaná časť prúťovky:
- do rezov vložíme kladnú osovú silu



obr. 3.35

Momentová rovnica rovnováhy k priesečníkom osových síl P_2 a P_3 :

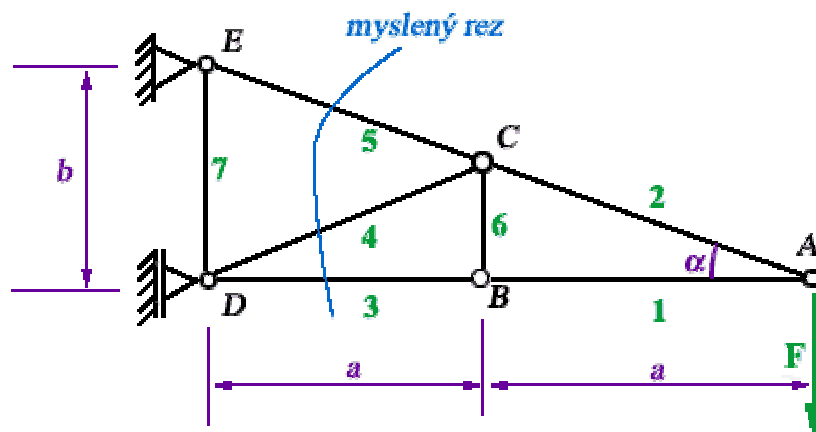
$$\sum M_{ie} = 0: P_4 \cdot 3h - A_y \cdot 3h = 0$$

$$P_4 = A_y = \frac{F}{2}$$

Podobným spôsobom možno určiť ďalšie požadované osovú silu.

Príklad:

Vypočítajte osovú sily P_3 , P_4 a P_5 v prútoch ramena stožiaru vysokého napätia. Dané je: F , a , b , α .



obr. 3.36

Osovú sily vypočítame z podmienok statickej rovnováhy pravej časti prútovky.

$$\sum M_{iD} = 0: -F \cdot 2a + P_5 \cdot p_5 = 0$$

$$P_5 = \frac{2a}{p_5}$$

Rameno sily P_5 k bodu D: $p_5 = 2a \cdot \sin \alpha$

$$P_5 = \frac{F}{\sin \alpha}$$

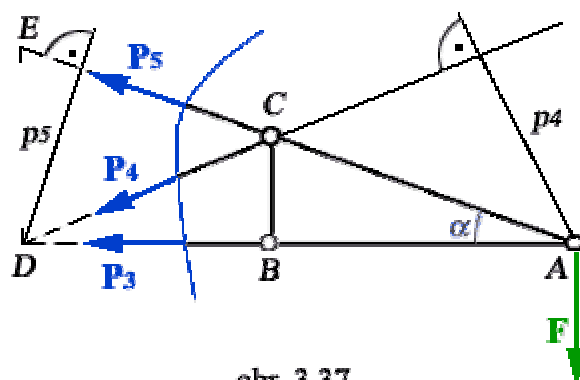
$$\sum M_{iC} = 0: -F \cdot a + P_3 \cdot \frac{b}{2} = 0$$

$$P_3 = F \frac{2a}{b} = \frac{F}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\sum M_{iA} = 0: P_4 \cdot p_4 = 0$$

$$P_4 = 0 \rightarrow \text{prút č.4 je nulový prút}$$

Z geometrie a zaťaženia prútovky je zrejmé, že aj prút č.6 je nulovým prútom. Z rovnováhy styčníka C potom vyplýva, že $P_2 = P_5$, a z rovnováhy styčníka B vyplýva, že $P_1 = P_3$. Keďže $P_4 = 0$, potom z rovnováhy styčníka D vyplýva, že aj prút č.7 je nulovým prútom, teda $P_7 = 0$.



obr. 3.37

4. Základné pojmy pružnosti a pevnosti

Učebný cieľ kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali ovládať:

- Čo je obsahom predmetu "Pružnosť a pevnosť", aké je jeho postavenie v odbore ESI.
- Čo je to poddajné kontinuum.
- Čím sú charakterizované vnútorné sily a mechanické napätia.
- Princíp metódy mysleného rezu.
- Ako je definovaný vektor mechanického napätia, normálové a šmykové napätie.
- Čo sú to základné prípady namáhania, a ako ich delíme.
- Aké sú základné zložky deformácie a ich matematické a fyzikálne vyjadrenie.
- Pracovný diagram trhacej skúšky, Hookov zákon a modul pružnosti.
- Ako je definované priečne zúženie.
- Odvodenie vzťahov pre energiu napätosti normálových a šmykových napätí.
- Odvodenie 1. Castiglianovej vety a jej fyzikálny význam.
- Na čo slúži pevnostná podmienka, čo je to dovolené namáhanie a miera bezpečnosti.

4.1 OBSAH A POSTAVENIE PREDMETU "PRUŽNOSŤ A PEVNOSŤ"

Predmet "Pružnosť a pevnosť" sa zaoberá rovnováhou deformovateľného (poddajného) telesa a skúma účinky pôsobenia zaťažujúcich síl na poddajné teleso.

Mechanické súčiastky strojov a zariadení, prenášajúce účinky zaťažujúcich síl, sú zhotovené z konštrukčných materiálov vyznačujúcich sa základnými mechanickými vlastnosťami:

- a. Pružnosť materiálu je schopnosť materiálu nadobúdať, po prerušení pôsobenia zaťažujúcich síl, svoj pôvodný tvar.
- b. Pevnosť materiálu je schopnosť materiálu odolávať pôsobeniu zaťažujúcich síl bez jeho porušenia.

Na rozdiel od statiky sa pružnosť a pevnosť zaoberá prvkami konštrukcie, ktoré pri vzájomnom pôsobení na seba menia svoje rozmery a tvar. Táto zmena sa nazýva *deformácia*. Hmotnému telesu schopnému sa deformovať hovoríme *poddajné teleso*. Mechanické vlastnosti pružnosť a pevnosť úzko súvisia s účinkami zaťažujúcich síl na poddajné teleso. Predmet Pružnosť a pevnosť skúma odozvu deformovateľného telesa na pôsobenie zaťažujúcich síl. Po zostavení matematického modelu daného konštrukčného prvku je jej cieľom navrhnúť jeho optimálne rozmery tak, aby nenastala porucha materiálu prekročením jeho pevnosti alebo neprimeranou deformáciou.

Obsah tejto časti predmetu "Mechanika a Termomechanika" je zameraný na poznatky o silovom pôsobení a jeho účinkoch na poddajné hmotné body a telesá pevnej fázy. Obsahuje aplikačné výpočtové metódy na bezpečný návrh niektorých konštrukčných prvkov a systémov silnoprádovej elektrotechniky a elektroenergetiky, s poukázaním na možné príčiny mechanických porúch a ich dôsledkov na bezpečnú a spoľahlivú prevádzku.

4.2 PODDAJNÉ KONTINUUM

Materiál konštrukčných prvkov možno rozdeliť do dvoch skupín.

a. kryštalické

b. amorfné

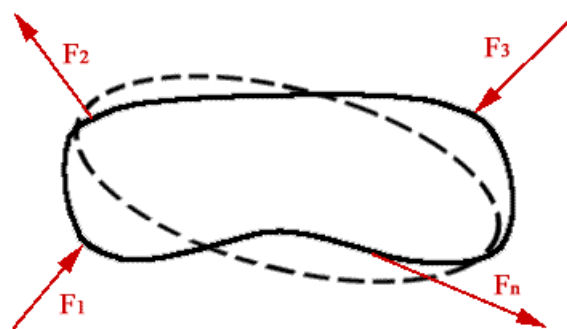
Kryštalické materiály pozostávajú z veľkého počtu malých zŕn. Každé zrno tvorí sústava atómov pravidelne v radoch rozložených, ktoré tvoria kryštalickú mriežku. Naproti tomu amorfné materiály nemajú pravidelne usporiadané atómy. Ak by sme pristupovali ku skúmaniu účinku zaťažujúcich síl na poddajné teleso *mikroskopickým spôsobom*, narazili by sme na problémy spojené najmä so zložitou matematického modelu a s odlišnosťami od ideálneho kryštalického zloženia konštrukčných materiálov (dané nerovnomernosťou kryštalizácie, nečistotami a vmestkami v kryštalickej mriežke). Preto v pružnosti a pevnosti abstrahujeme od skutočného zloženia hmotného telesa - aplikujeme *makroskopický prístup*. Hmotné poddajné teleso budeme považovať za *kontinuum*.

Koncept kontinua je odvodený z matematiky. Povieme, že systém reálnych čísiel je kontinuum. Medzi každými dvoma určitými číslami sú iné čísla, vlastne medzi uvažovanými dvoma číslami existuje nekonečne veľa reálnych čísiel. Intuitívne, čas môže byť reprezentovaný tromi systémami reálnych čísiel x , y , z . Čas a priestor identifikujeme ako štvorrozmerné kontinuum. Rozšírením pojmu kontinua na hmotu budeme hovoriť o spojitom rozdelení hmoty v priestore. Hmotné teleso bude takto pozostávať z hmotných bodov, z ktorých každý obsahuje veľké množstvo elementárnych častíc (atómov, elektrónov). Koncept materiálneho kontinua je matematickou abstrakciou (idealizáciou) reálneho sveta a je aplikovateľný na problémy, v ktorých jasnosť štruktúry sa môže zanedbať.

4.3 ROZDELENIE SÍL PÔSOBIACICH NA PODDAJNÉ KONTINUUM

Jednotlivé časti konštrukcií v spojení s inými tvoria konštrukčný celok, ktorý je buď v pokoji (napr. stožiar VN, zapuzdrený vodič, izolátor, osvetľovací systém, nádoba reaktora, atď.), alebo v pohybe (časti točivých elektrických strojov a pohonov, mechatronické systémy, atď.). Pritom prostredníctvom vzájomných dotykových plôch prenášajú sily na seba. Sily ktorými pôsobia ostatné časti konštrukcie na uvažovanú súčiastku, nazývame *vonkajšími silami*, ktorými sme sa už zaoberali v statike.

Vonkajšie zaťaženie možno ďalej deliť na *trvalé* a *dočasné*. Trvalé zaťaženie pôsobí po celý čas prevádzky konštrukcie, napr. jej vlastná tiaž a pod. Dočasné zaťaženie len nejaký časový úsek, napr. tiaž montéra na stožiar VN a pod. Podľa charakteru pôsobenia možno zaťaženie ešte rozdeliť na *statické* a *dynamické*. Statické zaťaženie vzrastá postupne od nuly až na vlastnú, menovitú hodnotu (napr. krútiaci moment elektromotora na hriadeľ). Pôsobenie dynamických síl vzniká spravidla v krátkej časovej perióde a pritom aj súčiastky, na ktoré dynamické sily pôsobia, sú obvyčajne v pohybe.



obr.4.1 Poddajné teleso

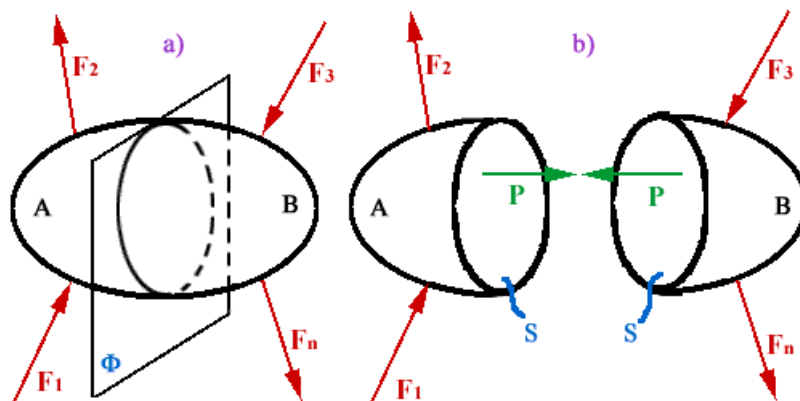
Na *obr. 4.1* vidíme poddajné kontinuum zaťažené silovou sústavou $F_1, F_2, \dots, F_n$. Teleso, ktoré malo pred zaťažením tvar vyznačený plnou čiarou, sa po zaťažení zdeformuje do tvaru vyznačeného čiarkovanou čiarou. (Deformácia telesa je pre názornosť nakreslená prehnane veľká. *Vo všetkých kapitolách tejto učebnice bude prijatý predpoklad nekonečne malých deformácií.*) Odozvou telesa na zaťažujúce sily je jeho deformácia. Ak zaťažujúce sily (akcie aj reakcie) prestanú pôsobiť, pružnosť materiálu spôsobí jeho návrat do pôvodného stavu. To znamená, že v prvkoch konštrukcie vznikajú pôsobením vonkajších síl *doplnkové vnútorné sily*, ktoré pôsobia proti úsiliu vonkajších síl porušiť konštrukčný prvok, alebo meniť jeho tvar. V ďalšom budeme tieto sily nazývať *vnútornými silami*. Keby sme teleso chápali mikroskopicky, atómy sa v mriežke udržiavajú vzájomne pôsobiacimi medziatómovými silami. Vplyvom vonkajších síl sa vzdialenosti medzi atómami menia (teleso sa deformuje), čo je spôsobené zmenou vzájomne pôsobiacich síl medzi atómami. Analogicky pri makroskopickom prístupe nachádzajú sa hmotné body v telese v rovnováhe. Ak začneme pôsobiť vonkajšími silami, hmotné body sa bránia vysunutiu zo svojej rovnovážnej polohy - vznikajú už spomenuté *vnútorné sily*. Tieto vnútorné sily sú, podobne ako pojem kontinua, matematickou abstrakciou, ktorú zaviedli Cauchy a Euler.

Aby sa dal číselne charakterizovať stupeň účinku vonkajších síl na deformovaný prvok, treba vedieť vypočítať veľkosť vnútorných síl. Na to sa v pružnosti a pevnosti používa metóda *jedného alebo viacerých myšlených rezov*. Voľba ich počtu závisí od zložitosti riešenej úlohy.

4.4 METÓDA MYSLENÉHO REZU NA URČENIE VÝSLEDNICE VNÚTORNÝCH SÍL

Metóda myšleného rezu tkvie v nasledujúcich úvahách:

Teleso na *obr. 4.2* rozrežeme myšleným rovinným rezom Φ na dve konečné časti A a B.



obr.4.2 Metóda myšleného rezu

Pôsobením vonkajších síl sa obe časti telesa usilujú oddeliť a udržiavajú sa pohromade vzájomnými vnútornými silami pôsobiacimi medzi hmotnými bodmi, ktoré sú na oboch

stranách myslenného rezu. Na *obr. 4.2* sú nakreslené výslednice týchto síl. Vnútorne sily pôsobiace na časť A od časti B a vnútorne sily pôsobiace na časť B od časti A sa podľa zákona akcie a reakcie sebe rovnajú (Cauchyho-Eulerov princíp). Ak má nastať rovnováha každej z odrezaných častí, musia byť vnútorne sily pôsobiace na časť A v rovnováhe s vonkajšími silami pôsobiacimi na túto časť a rovnako i na časti B. Výslednicu vnútorných síl $\mathbf{P}$ nazývame *vektorom napätia* a určíme ho zo statických podmienok rovnováhy vonkajších a vnútorných síl a momentov síl.

4.5 NORMÁLOVÉ A TANGENCIÁLNE (ŠMYKOVÉ) NAPÄTIE

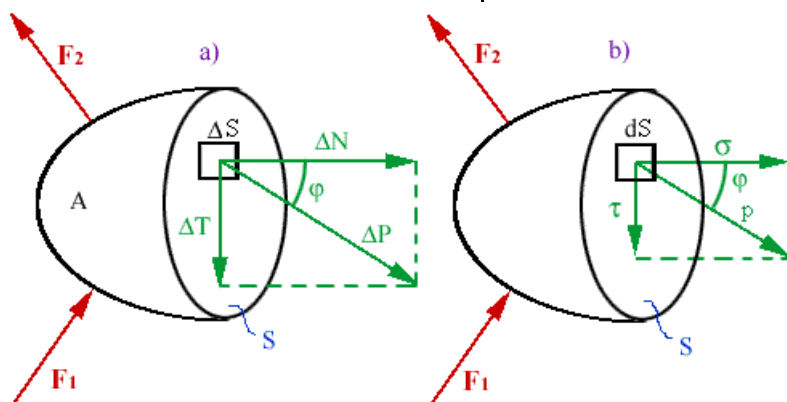
Vnútorne sily sú vo všeobecnosti nepravidelne rozložené po priereze, takže statické podmienky rovnováhy nestačia na určenie rozloženia vnútorných síl v jednotlivých hmotných bodoch ležiacich v rovine myslenného rezu. Zo statických podmienok rovnováhy možno určiť len výslednicu vnútorných síl.

Aby sme mohli lepšie porovnávať účinok vnútorných síl v rôznych rezových plochách, zavádzame pomer vnútorných síl na jednotku prierezovej plochy, ktorý nazývame *mechanickým napätím*.

Vybratý hmotný bod si nahradíme pravouhlým elementárnym hranolčekom, ktorého jedna plocha sa nachádza v rovine rezu a jej veľkosť je ΔS , *obr.4.3*. Na tejto plôške pôsobí elementárna vnútorná sila $\Delta \mathbf{P}$ a s normálou k rezovej rovine zvierá uhol φ . Túto silu rozložíme do normály a tangenty k rezovej rovine. Potom podľa *obr.4.3* platí:

$$\Delta N = \Delta P \cdot \cos \varphi$$

$$\Delta T = \Delta P \cdot \sin \varphi$$



obr.4.3 Pojem napätia

Limita pomeru vnútorných síl $\Delta \mathbf{P}$, $\Delta \mathbf{N}$, $\Delta \mathbf{T}$ k ploche ΔS sa nazýva napätie, jeho smer a zmysel sa zhoduje so smerom a zmyslom vnútornej sily a ktorého rozmer je $N \cdot mm^{-2}$ (MPa), prípadne iné odvodené jednotky. Napätie budeme v ďalšom texte označovať písmenami našej, resp. gréckej abecedy. Označenie p budeme používať pre *napätie* ľubovoľne sklonené k vyšetrovanej plôške, písmenom σ budeme označovať *normálové napätie*, ktoré je kolmé na rovinu rezu a písmenom τ *šmykové napätie*, ktoré leží v rovine rezu *obr.4.3*

Jednotlivé napätia sú definované vzťahmi:

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S} = \frac{dP}{dS}$$

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta S} = \frac{dN}{dS}$$

$$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta S} = \frac{dT}{dS}$$

Normálovému napätiu priradujeme tiež znamienko, a to: **kladné**, keď zmysel sily ΔN smeruje von z plochy rezu, a nazývame ho napätím ťahovým. Ak je zmysel sily ΔN opačný, priradujeme mu znamienko **záporné**, a takéto napätie nazývame tlakovým. Na orientácii šmykového napätia obvykle nezáleží, ale len na jeho veľkosti.

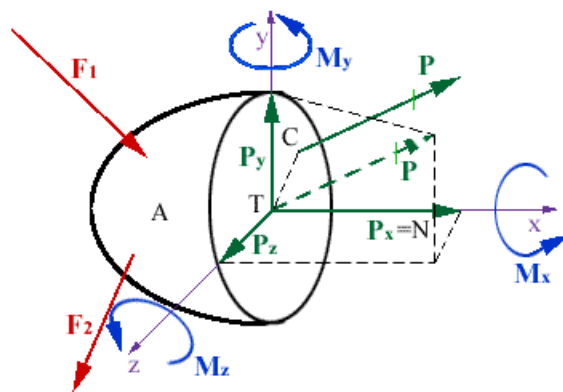
Iné napätie ako ťahové, tlakové alebo šmykové na ploške ΔS nie je mysliteľné. Ich smer a veľkosť závisí od vonkajšieho zaťaženia a od veľkosti a polohy plošky ΔS . Pri každom druhu namáhania sa môžu vyskytovať iba tieto napätia, a to alebo každé samostatne, alebo v kombinácii.

Z rovníc napätia je zrejmé, že:

$$\sigma = p \cdot \cos \varphi, \quad \tau = p \cdot \sin \varphi, \quad p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

4.6 ZÁKLADNÉ PRÍPADY NAMÁHANIA

V bode C sme určili výslednicu vnútorných síl pre rezovú plochu S. Táto výslednica P je v statickej rovnováhe s vonkajšími silami, pôsobiacimi na časť telesa A obr.4.4

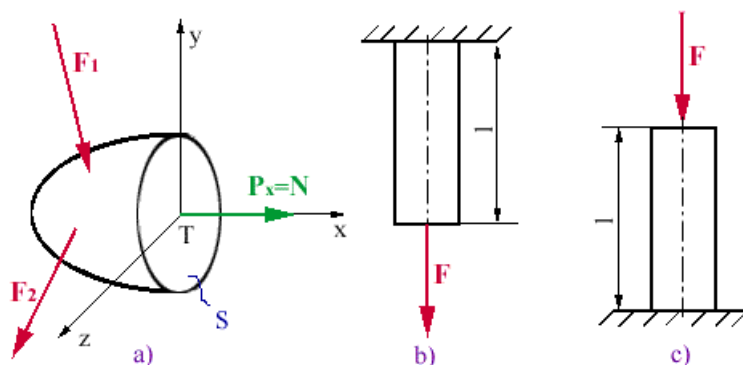


obr.4.4 Zložky výslednice vnútorných síl

Preložme vnútornú silu $\mathbf{P}$ do ťažiska T plochy prierezu S a rozložme ju do súradnicových osí x, y, z , z ktorých os x je kolmá na rezovú rovinu. Tieto zložky výslednej vnútornej sily sú na obrázku vyznačené $\mathbf{P}_x, \mathbf{P}_y$ a $\mathbf{P}_z$. Aby táto transformácia sily bola ekvivalentná, treba k preloženej sile $\mathbf{P}$ pripojiť dvojicu síl, ktorej zložky otáčavého účinku do súradných osí sú M_x, M_y, M_z . Tak sme dostali v ťažisku plochy prierezu šesť zložiek výslednice vnútorných síl (tri sily a tri momenty síl). Ak pôsobí v ťažisku plochy S viac zložiek výslednice vnútorných síl ako jedna, hovoríme o **kombinovanom (zloženom) namáhaní**. Ak pôsobí v uvažovanom reze len jedna z uvažovaných zložiek, hovoríme o **jednoduchom (prostom) namáhaní**. Podľa toho rozoznávame päť základných (jednoduché, prosté, čisté) prípadov namáhania: prostý ťah (tlak), prostý šmyk, prosté krútenie, prostý ohyb, a vzper.

4.6.1 Prostý ťah (tlak)

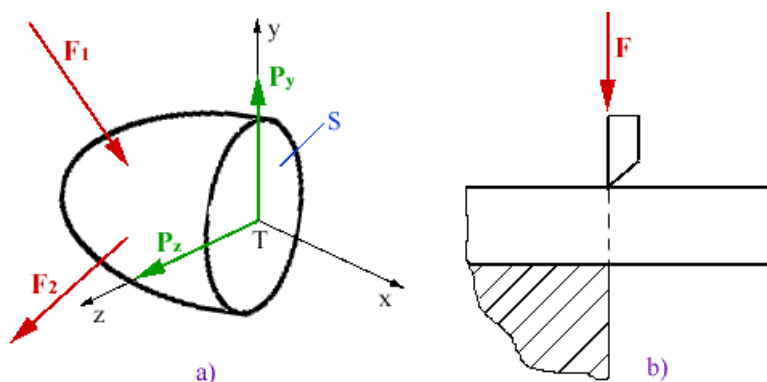
O prostom ťahu alebo tlaku hovoríme vtedy, ak v myslenom reze pôsobí len zložka výslednice vnútorných síl $\mathbf{P}_x = N$ obr.4.5c. Najjednoduchším prípadom ťahového namáhania je tenká priama tyč, konštantného prierezu namáhaná osovou silou $\mathbf{F}$ obr.4.5b. Najjednoduchším prípadom tlakového namáhania je prípad podľa obr.4.5c. Pretože v myslenom reze pôsobí výslednica vnútorných síl na normále k prierezu, pri ťahu, resp. tlaku vzniká normálové napätie σ ($+\sigma$ pre ťah a $-\sigma$ pre tlak). Takto sú namáhané napr. tyče (prúty) stožiarov elektrického vedenia, osvetľovacích rámp, vodiče a laná, výstuže optických a iných káblov, izolátory a pod.



obr.4.5 Čistý ťah, tlak

4.6.2 Prostý šmyk

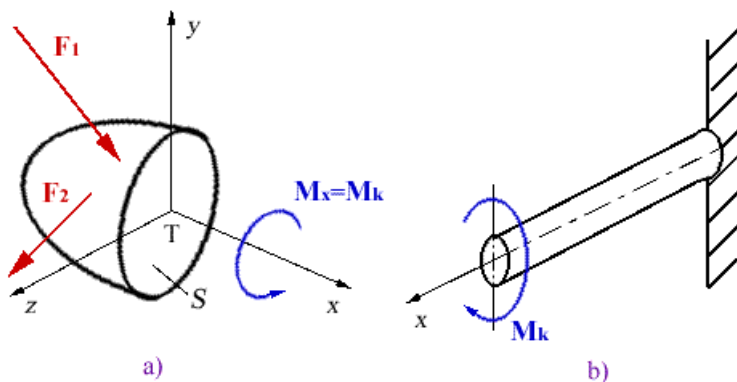
O prostom šmyku hovoríme vtedy, ak v myslenom reze pôsobia len zložky výslednice vnútorných síl $\mathbf{P}_y$ a $\mathbf{P}_z$ obr.4.6a alebo len jedna z nich. Výsledná šmyková sila v danom reze je daná vektorovým súčtom obidvoch zložiek. Najjednoduchším prípadom šmykového namáhania je strihanie materiálu obr.4.6b. Pretože výslednica vnútorných síl leží v myslenom reze, pri prostom šmyku vzniká šmykové napätie τ .



obr.4.6 Čistý šmyk

4.6.3 Prosté krútenie

O tomto druhu namáhania hovoríme vtedy, ak v myslenom reze zo všetkých možných zložiek pôsobí len moment $\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_k$, ktorého rovina pôsobenia je totožná s rovinou rezu obr.4.7a. Najjednoduchším prípadom namáhania tohto druhu je krútenie tyče (hriadeľa) kruhového prierezu obr.4.7b.



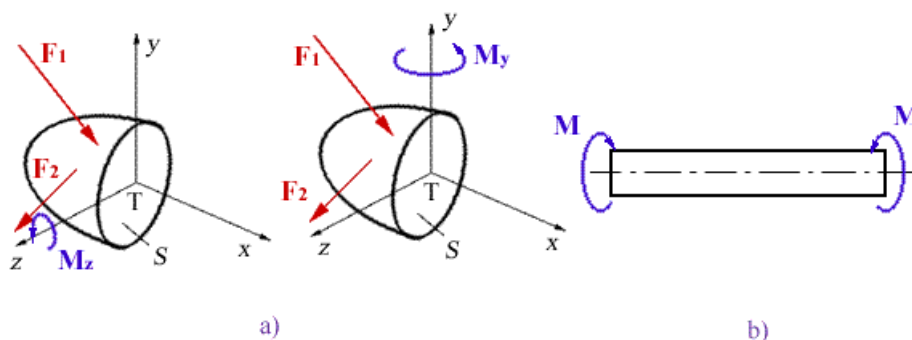
obr.4.7 Čistý krut

Krútením sú napr. namáhané hriadele a osi točivých strojov.

4.6.4 Prostý ohyb

O prostom ohybe hovoríme vtedy, ak v myslenom reze pôsobí len moment M_y alebo len M_z *obr.4.8a*. Ak pôsobia obidve zložky súčasne, hovoríme spravidla o *šikmom ohybe*.

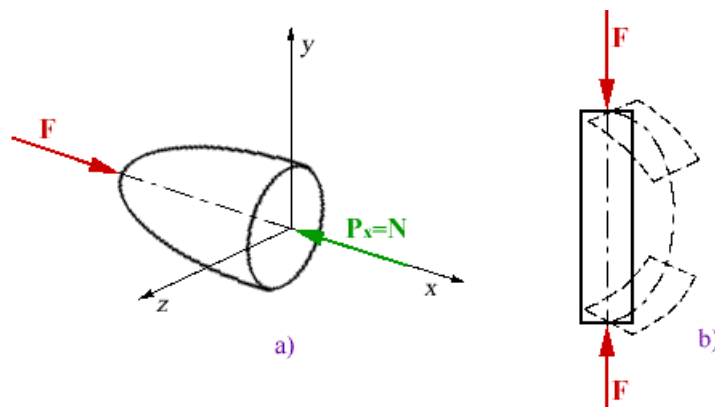
Najjednoduchší prípad tohoto druhu namáhania je znázornený na *obr.4.8b*. Konštrukčné prvky prenášajúce ohybový moment nazývame *nosníkmi*.



obr.4.8 Čistý ohyb

4.6.5 Vzper

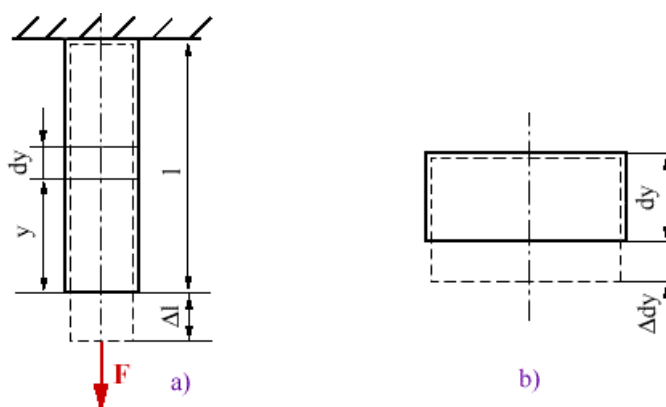
Podobne ako pri prostom tlaku, i v tomto prípade pôsobí v myslenom reze tlaková sila $P_x = N$ *obr.4.9a*. Ak priečny prierez tyče je proti jej dĺžke malý (štíhly prút), dôjde po prekročení určitej (kritickej) hodnoty osovej sily k vybočeniu priamej pozdĺžnej osi prúta, tyč sa prehne, až sa zlomí - stratí stabilitu *obr.4.9b*. Stratiť stabilitu môžu konštrukčné prvky (štíhle, tenkostenné) namáhané tlakovou silou, ako sú napríklad prúty stožiarov, rámp, veží a anténnych systémov.



obr.4.9 Vzper štíhleho prúta

4.7 POMERNÉ PREDLŽENIE A POMERNÉ SKOSENIE

Ak namáhame priamu tyč ťahom podľa *obr.4.10b*, pozorujeme, že tyč sa predlžuje a jej prierez sa zužuje. Zúženie prierezu tyče oproti jej predĺženiu býva zanedbateľné.



obr.4.10 Namáhanie osovou silou F

Dvoma rovnobežnými myslennými rezmi vyberme z tyče valček nekonečne malej výšky dy vo vzdialenosti y *obr.4.10b* od spodného okraja tyče. Zaťažením tyče sa valček predlži o hodnotu Δdy .

Pomer

$$\varepsilon = \frac{\Delta dy}{dy}$$

nazývame *pomerným predĺžením* tyče. Je to predĺženie pripadajúce na jednotku dĺžky tyče. Ak je pomerné predĺženie vo všetkých bodoch prierezu a vo všetkých priečných prierezoch rovnaké, možno celkové predĺženie tyče vyjadriť vzťahom

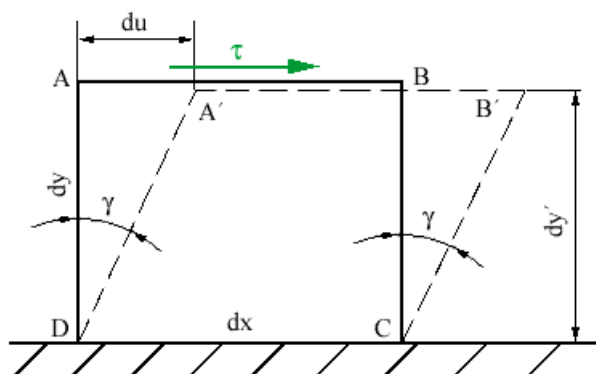
$$\Delta l = \int_0^l \Delta dy = \int_0^l \varepsilon dy = \varepsilon l$$

odkiaľ

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Ako vidieť z týchto rovníc pomerné predĺženie je *veľičina bezrozmerná*.

Uvažujeme elementárnu časť plochy prierezu ABCD s rozmermi dx , dy *obr.4.11*, ktorá sa vplyvom šmykových napätí τ pretvorí, ako je to na obrázku vyznačené.



obr.4.11 Pomerné skosenie

Ak je toto pretvorenie malé, môžeme zmenu dĺžky dy zanedbať. Posunutie du môžeme potom vyjadriť vzt'ahom

$$du = \operatorname{tg} \gamma \cdot dy$$

alebo

$$dy' \doteq dy$$

Keďže uhol γ je malý, možno písať:

$$\operatorname{tg} \gamma \doteq \gamma$$

takže bude

$$du = \gamma \cdot dy$$

a z toho pomer

$$\gamma = \frac{du}{dy}$$

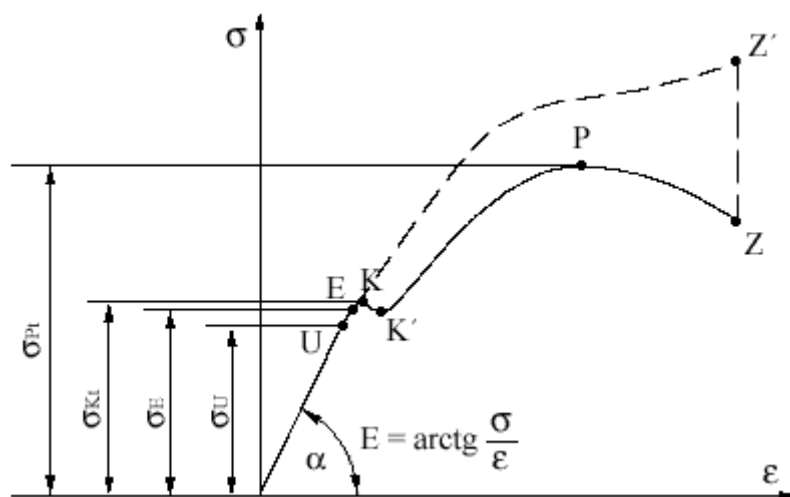
nazývame pomerným skosením (tiež zmena pravého uhla v elementárnom hranolčeku). Tak ako pomerné predĺženie, aj táto veličina je bezrozmerná. Pomerné predĺženie a skosenie sú základnými zložkami deformácie telesa.

4.8 PRACOVNÝ DIAGRAM TRHACEJ SKÚŠKY

Informácie o pružnosti a pevnosti materiálu nám dávajú *skúšky mechanických vlastností*. Jedna z takýchto skúšok je trhacia skúška ťahom. Skúšobná tyč normalizovaného tvaru a rozmerov sa upne do čelustí trhacieho stroja a postupne sa plynulo zaťažuje prostým ťahom. Pritom sa automaticky zaznamenáva závislosť medzi zaťažením a príslušným predĺžením skúšobnej tyče. Pri známych rozmeroch skúšobnej tyče (počiatočný prierez S , dĺžka l) možno získať závislosť pomerného predĺženia od napätia.

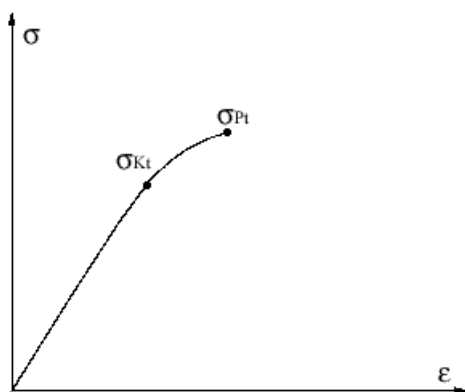
Na obr.4.12 je nakreslený diagram napätia a pomerného predĺženia "mäkkej" konštrukčnej ocele. Z obrázku vidieť, že časť diagramu až po bod U je lineárny, čiže napätie je úmerné pomernému predĺženiu. Napätie prislúchajúce bodu U nazývame *medzou úmernosti* σ_U . Pri skúške možno nájsť také napätie, po hodnotu ktorého bude mať tyč len pružné deformácie.

Toto napätie sa nazýva *medza pružnosti* σ_F . Bod E leží spravidla vyššie, ale veľmi blízko k bodu U. Ak skúšobnú tyč odľahčíme v stave pod medzou pružnosti, pružné (elastické) deformácie vymiznú a skúšobná tyčka nadobudne svoj pôvodný tvar. Po prekročení medze pružnosti začnú vznikať trvalé plastické deformácie. V bode K sa začne skúšobná tyč predlžovať bez toho, že by napätie stúpalo. Napätie prislúchajúce bodu K (resp. K') nazývame hornou (resp. spodnou) medzou klzu. Veľkosť pružnoplastických deformácií ε pri dosiahnutí medze klzu pri konštrukčných oceliach neprekračuje hodnotu 0,001 ~ 0,003.



obr.4.12 Skúška v ťahu

Najväčšia hodnota napätia pri skúške je daná napätím σ_P (bod P) - *medza pevnosti v ťahu*. Konečné porušenie nastáva však pri napätí, ktoré prislúcha bodu Z. Na obr.4.12 je čiarkovanou čiarou vyznačený priebeh tej istej závislosti, vzťahovaný však na okamžitý prierez tyčky. Materiál, pri ktorom nastáva porucha po značných pružnoplastických deformáciách, sa nazýva *húževnatý*.



obr.4.13 Krehký materiál

Na obr.4.13 je znázornený diagram ťahovej skúšky liatiny. Tento materiál má veľmi nízku medzu úmernosti a nemá jasne vyhranenú medzu klzu. Medza klzu sa nachádza blízko medze pevnosti materiálu. Takýto materiál pri ktorom nastane porucha bez významnejších pružnoplastických deformácií, nazývame *krehkým*. Skrehnúť môže aj pôvodne húževnatý materiál, napr. vplyvom teplotného namáhania. Materiál jadrového reaktora krehne aj vplyvom radiačného žiarenia. Typickým krehkým materiálom je tiež sklo, keramika, a iné.

4.9 HOOKOV ZÁKON

Lineárnu závislosť medzi napätím a deformáciou do medze úmernosti σ_P definoval roku 1860 Robert Hooke jedným zo základných zákonov pružnosti a pevnosti:

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \text{const.} = E = \text{tg} \alpha \quad \text{alebo} \quad \sigma = E \cdot \epsilon$$

ktorý nazývame *Hookov zákon*.

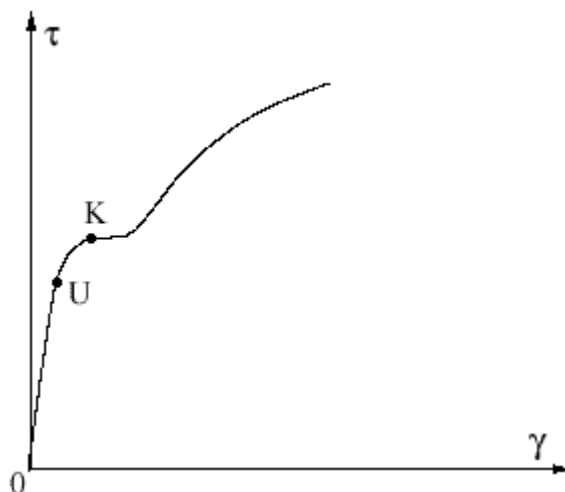
Konštantu úmernosti E nazývame *modulom pružnosti v ťahu*. Modul pružnosti charakterizuje mechanickú vlastnosť - pružnosť materiálu a je závislý od druhu materiálu skúšobnej tyčky.

Pretože pomerné predĺženie ε je bezrozmerná veličina, má modul pružnosti v ťahu rozmer napätia, teda

$$E = [N.m^{-2}] \quad \text{alebo} \quad [N.mm^{-2}] = [MPa]$$

Pre oceľ nadobúda hodnoty $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N.mm}^{-2}$. Hliník má modul pružnosti 78000 MPa , sklenná výstuž optických vlákien má $E = 50000 \text{ MPa}$. Modul pružnosti rôznych materiálov je závislý na technológii výroby a jeho ďalšom spracovaní.

Ak namáhame nejakú látku prostým šmykom, možno skúškami určiť vzťah medzi šmykovým napätím τ a pomerným skosením γ . Na obr.4.14 je nakreslený diagram konštrukčnej ocele, ktorý sa zistil pri namáhaní tenkostennej rúrky prostým krútením.



obr.4.14 Závislosť medzi šmykovým napätím a pomerným skosením

Diagram sa podobá diagramu skúšok v ťahu a možno na ňom vidieť medzu úmernosti τ_U (bod U) a medzou klzu τ_K (bod K). Po medzu úmernosti platí vzťah

$$\tau = G \gamma$$

Kde G je materiálová konštanta a nazýva sa **modul pružnosti v šmyku**. Pretože γ je bezrozmerná veličina, má i tento modul (tak ako aj E) rozmer napätia. Hodnota modulu pružnosti v šmyku pre oceľ je $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ N.mm}^{-2} = 0,8 \cdot 10^{11} \text{ N.m}^{-2}$

Ak je modul pružnosti materiálu vo všetkých smeroch rovnaký, hovoríme, že látka je **izotropná**. Materiály používané v konštrukčnej praxi považujeme spravidla za **izotropné** a **homogénne**, t.j. také, ktoré majú vo všetkých smeroch rovnaké materiálové vlastnosti. V opačnom prípade hovoríme o **anizotropných** látkach. Modul pružnosti ako aj iné vlastnosti materiálov možno nájsť na web stránke www.mems.org.

4.10 PRIEČNE ZÚŽENIE

Súčasne s predĺžením skúšobnej tyče v smere pozdĺžnej osi pozorujeme pri prostom ťahu aj skrátenie jej priečných rozmerov. Toto skrátenie je, ako ukázali skúšky, v rozsahu platnosti Hookovho zákona pri izotropných materiáloch úmerne napätiu σ , a tým i osovému pomernému predĺženiu ε_x . Keď vytkneme zo skúšobnej tyče elementárny hranolček podľa obr. 4.15, potom možno priečne zúženia v smere y a z popísať rovnicami:

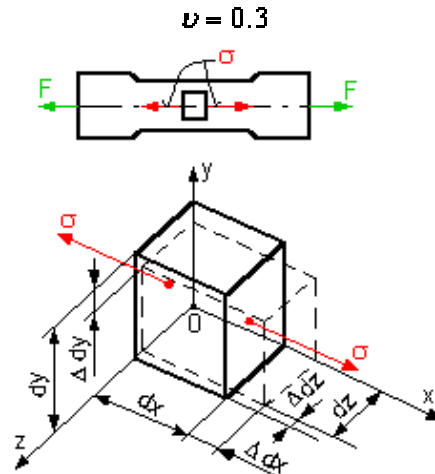
$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma}{m \cdot E} = -\frac{\nu \cdot \sigma}{E}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dz}{dy} = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma}{m \cdot E} = -\frac{\nu \cdot \sigma}{E} = \varepsilon_y$$

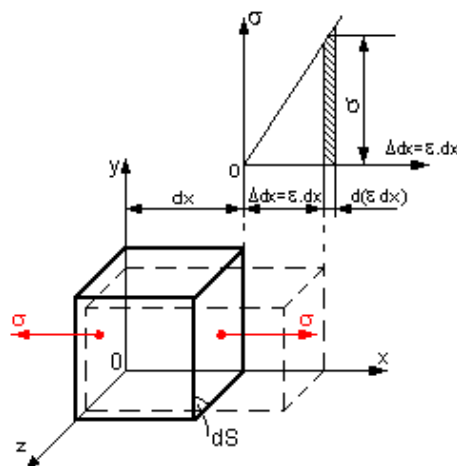
Súčiniteľa m nazývame Poissonova konštanta. Často, najmä v numerických metódach, sa používa jej prevrátená hodnota, ktorú nazývame *Poissonovým číslom*. Pre oceľ je Poissonova konštanta

$$m = \frac{10}{3}$$

resp. Poissonovo číslo



obr.4.15 Deformácia pri jednoosovej napätosti



obr.4.16 Energia napätosti normálových napätí

4.11 ENERGIA NAPÄTOSTI

Energiou napätosti rozumieme energiu, ktorá sa skumuluje v pôvodne nezaťaženom telese, keď nadobudne určité pretvorenie, a to od všetkých vnútorných síl pôsobiacich na nekonečne malé elementy telesa. Táto energia - za predpokladu platnosti Hookovho zákona - sa rovná práci vonkajších síl, vykonanou pri pretvorení telesa. Vonkajšie a vnútorné sily musia byť pritom v statickej rovnováhe.

Deformačnú prácu vonkajších síl - podľa definície známej z fyziky - určíme podľa vzťahu

$$W = \int_{(s)} F \cdot ds$$

Kde F je zaťažujúca sila, ktorá pôsobí na dráhe s . Energiu napätosti určíme osobitne pre normálové a osobitne pre šmykové napätia, pričom využijeme horeuvedený vzťah.

a) Energia napätosti normálových napätí

Pri namáhaní normálovým napätím v smere osi x vzniká deformácia elementárneho hranola podľa obr. 4.16. Za predpokladu platnosti Hookovho zákona je závislosť medzi napätím σ a pretvorením ε lineárna.

Vnútna sila pôsobiaca na plochu dS elementárneho hranolčeka bude $dF = \sigma \cdot dS$. Potom elementárna deformačná práca dW_σ , ktorá je rovná energii napätosti dA_σ elementárneho hranolčeka, bude

$$dW_\sigma = dA_\sigma = \int_{(s)} dF \cdot ds = \int_0^{\Delta dx} \sigma \cdot dS \cdot d(\Delta dx) = \int_0^{\varepsilon \cdot dx} \sigma \cdot dy \cdot dz \cdot d(\varepsilon \cdot dx)$$

Pretože $\sigma = E \cdot \varepsilon$ a dx , dy a dz sú konštanty, možno túto rovnicu upraviť do tvaru

$$dA_\sigma = dy \cdot dz \cdot E \int_0^{\varepsilon \cdot dx} \varepsilon \cdot d(\varepsilon \cdot dx) = dy \cdot dz \cdot \frac{E}{dx} \int_0^{\varepsilon \cdot dx} \varepsilon \cdot dx \cdot d(\varepsilon \cdot dx) = dy \cdot dz \cdot \frac{E}{dx} (\varepsilon \cdot dx)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon^2 \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon^2 \cdot dV$$

kde $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ je objem elementu. Celková energia napätosti potom bude

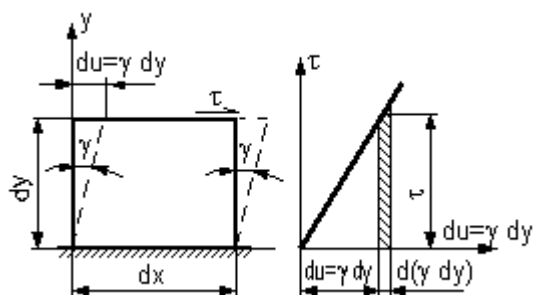
$$A_\sigma = \frac{1}{2} \int_V E \cdot \varepsilon^2 \cdot dV = \frac{1}{2} \int_V E \cdot \varepsilon \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma \cdot \varepsilon \cdot dV$$

Poznámka: Energia napätosti A_σ je vždy kladná, i keď pôjde o namáhanie v tlaku. Vtedy

$$A_\sigma = \frac{1}{2} \int_V (-\sigma) \cdot (-\varepsilon) \cdot dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma \cdot \varepsilon \cdot dV$$

b) Energia napätosti šmykových napätí

Podobne ako pri normálových napätíach, možno vyjadriť energiu napätosti šmykových napätí (obr. 4.17)



obr.4.17 Energia napätosti šmykových napätí

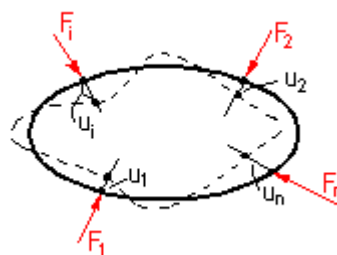
$$A_\tau = \frac{1}{2} \int_V \tau \cdot \gamma \cdot dV$$

Celková energia napätosti v danom telese je vo všeobecnom prípade daná súčtom energie napätosti normálových a šmykových napätí

$$A = A_\sigma + A_\tau$$

4.12 CASTIGLIANOVA VETA

Uvažujeme poddajné teleso, ktoré je zaťažované rovnovážnou silovou sústavou $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n$ (obr. 4.18).



obr.4.18 Castiglianova veta

Pôsobiská vonkajších síl sú na povrchu telesa, ktoré sa pri pretvorení telesa posunú o hodnoty $u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n$. Pretože napätia σ a τ sú v konečnom dôsledku pre teleso daných rozmerov funkciou zaťažujúcich síl, bude aj celková energia napätosti funkciou síl $A = f(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n)$. Ak zväčšíme napr. silu F_i o veľmi malú hodnotu dF_i , zväčší sa posunutie o du_i a energia napätosti o hodnotu

$$dA = \frac{\partial A}{\partial F_i} dF_i$$

takže energia napätosti bude

$$A + dA = A + \frac{\partial A}{\partial F_i} dF_i = (F_i + dF_i)(u_i + du_i) = F_i(u_i + du_i) + dF_i u_i + dF_i du_i$$

kde A je práca sily F_i na posunutíach $(u_i + du_i)$, a súčin dvoch malých veličín $dF_i du_i$ zanedbáme. Potom

$$A + \frac{\partial A}{\partial F_i} dF_i = A + u_i dF_i$$

resp.

$$\frac{\partial A}{\partial F_i} = u_i$$

Výsledná rovnica je matematickým vyjadrením prvej Castiglianovej vety, podľa ktorej posunutie pôsobiska ľubovoľnej sily pri deformácii telesa (za predpokladu platnosti Hookovho zákona) sa rovná parciálnej derivácii celkovej energie napätosti podľa tejto sily. Zmysel posunutia sily u_i súhlasí so zmyslom sily F_i .

Poznámka: I. Castiglianova veta vyžaduje taktiež platnosť *zákona superpozície účinkov*, ktorý si vysvetlíme neskôr. Zákon superpozície účinkov hovorí: *Ak na teleso pôsobí sústava vonkajších síl, potom výsledný napäťový a deformačný účinok je rovný súčtu účinkov od jednotlivých síl, pričom nezáleží na poradí pôsobiacich síl.*

Pri odvádzaní tejto vety mohli sme však znakom F_i označiť aj moment točivej dvojice síl M_i a znakom u_i zase príslušné natočenie φ_i (obr. 4.19).



obr.4.19 Uhol natočenia

Postup i výsledok by boli rovnaké a preto možno tiež písať:

$$\varphi_i = \frac{\partial A}{\partial M_i}$$

I.Castiglianovu vetu budeme používať na vyjadrenie deformácie telesa.

4.13 MIERA BEZPEČNOSTI A DOVOLENÉ NAMÁHANIE

Trhacia skúška nám dáva dôležité údaje o mechanických vlastnostiach materiálu. Ak z nej poznáme medzu klzu a medzu pevnosti materiálu, môžeme určiť pre každú technickú úlohu veľkosť napätia, ktoré môžeme pokladať za bezpečné. Toto prípustné napätie voláme *dovoleným namáhaním*. Pri voľbe dovoleného namáhania pre ocel' si treba uvedomiť, že tento materiál pri napätiach pod medzou úmernosti môžeme považovať za dokonale pružný a pri napätiach nad touto medzou dochádza k trvalému plastickému pretvoreniu. Ak chceme pripustiť len pružné deformácie, dovolené namáhanie musí byť nižšie ako je medza úmernosti daného materiálu. Pretože zisťovanie tejto medze je dosť obtiažne a jej poloha závisí od presnosti merania, berieme pre určenie dovoleného namáhania materiálu obyčajne medzu klzu alebo medzu pevnosti. Veľkosť dovoleného namáhania potom určujeme podľa rovníc:

$$\sigma_{DOV} = \frac{\sigma_K}{s_k}$$

$$\sigma_{DOV} = \frac{\sigma_{Pt}}{s_p}$$

kde s_k , resp. s_p sú miery bezpečnosti vzhľadom na medzu klzu σ_K , resp. na medzu pevnosti σ_{Pt} .

Pri konštrukčných oceliach berieme obvykle za základ pre výpočet dovoleného namáhania medzu klzu σ_K . Pri statickom namáhaní pritom uvažujeme mieru bezpečnosti $s_k \in (1,4 \sim 1,6)$. Pre krehké materiály (liatinu a pod.) berieme za základ na určenie dovoleného namáhania medzu pevnosti σ_{Pt} . Mieru bezpečnosti volíme v závislosti od presnosti zvoleného matematického modelu danej konštrukcie, ako aj metódy riešenia homogenity použitých látok.

Pre mnohé konštrukcie sú hodnoty miery bezpečnosti určené normami STN.

Podľa rovnakých metód volíme dovolené namáhanie v šmyku:

$$\tau_{DOV} = \frac{\tau_K}{s_k}$$

$$\tau_{DOV} = \frac{\tau_{Pt}}{s_p}$$

Ako uvidíme ďalej, je vzájomný vzťah medzi σ_{DOV} a τ_{DOV} určených hypotézami pevnosti. Je zrejmé, že ak súčiastka má pracovať s príslušnou bezpečnosťou, musí byť splnená *bezpečnostná podmienka*

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{DOV}$$

alebo

$$\tau_{max} \leq \tau_{DOV}$$

kde σ_{max} a τ_{max} sú maximálne hodnoty napätia.

5. Úlohy prostého ťahu a tlaku

Učebný cieľ kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali ovládať:

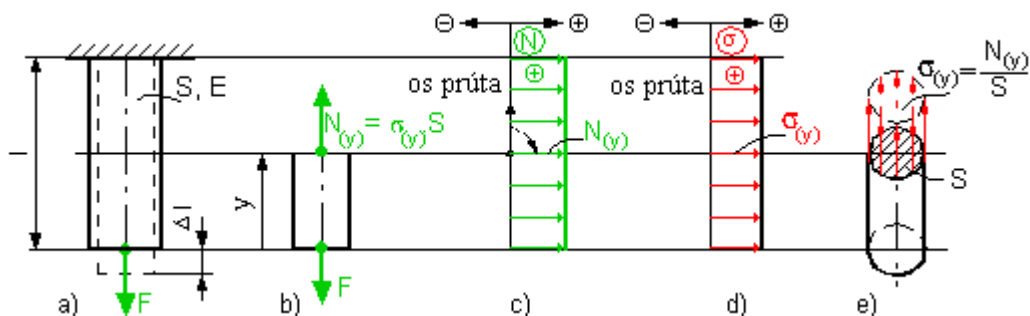
- Kedy nastáva namáhanie na čistý ťah-tlak
- Ktorá zložka výslednice vnútorných síl je nenulová
- Ako je definované normálové napätie čistého ťahu-tlaku
- Podľa akého pravidla volíme myslené rezy
- Načo určujeme priebeh osových síl a normálových napätí
- Ako sa vypočíta celkové predĺženie (skrátene) tyče
- Ako zohľadniť vlastnú tiaž pri výpočte vnútorných síl a celkového predĺženia
- Akým postupom treba riešiť staticky neurčité úlohy
- Ako sa dimenzujú jednoduché prútočky
- Ako sa určí posunutie styčníc prútočky
- Ako sa riešia staticky neurčité prútočky
- Ako sa vykonáva statická analýza zložitých prútoviek
- Ako je definovaná tiažová reťazovka - predpoklady a mechanický model
- Aký priebeh má osová sila a normálové napätie po dĺžke reťazovky
- Ako sa určí celkové predĺženie reťazovky
- Ako sa vykonáva statická analýza reťazoviek symetrických a s prevýšením upevnenia jej koncov

Ak možno určiť výslednicu vnútorných síl - *osovú silu* zo statických podmienok rovnováhy, hovoríme o staticky určitej úlohe čistého ťahu alebo tlaku. V opačnom prípade musíme statické podmienky rovnováhy doplniť ďalšími - *deformačnými podmienkami* a hovoríme o staticky neurčitých úlohách. Medzi prípady namáhania prostým ťahom možno zaradiť: namáhanie vonkajšou osovou silou, vlastnou tiažou a odstredivou silou a iné.

5.1 NAMÁHANIE OSOVOU SILOU F

a) Staticky určité úlohy

Uvažujeme tyč konštatného prierezu na jednom konci pevne zachytenú a na druhom konci zaťaženú vonkajšou osovou silou F . Zaujímá nás poloha nebezpečného prierezu tyče a celková deformácia tyče. Na to potrebujeme určiť priebeh výslednice vnútorných síl - osovú silu N a priebeh normálových napätí σ v jednotlivých myslených rezoch tyče, ako aj celkové predĺženie tyče Δl , resp. pomerné predĺženie ϵ .



Obr.5.1 Čistý ťah

Rozrežeme tyč na obr. 5.1a myslenným rezom kolmým na os tyče na dve časti. Počiatok súradnice y volíme vo voľnom konci tyče. Odrezanú časť tyče 5.1b uvedieme do statickej rovnováhy tak, že do myslenného rezu vložíme (v kladnom smere - von z rezu) výslednicu vnútorných síl $N(y)$. Táto osová sila musí byť v rovnováhe s vonkajšími silami pôsobiacimi na odrezanú časť.

Zo statických podmienok rovnováhy síl do osi y pre odrezanú časť tyče máme:

$$\sum F_y = 0: \quad N(y) - F = 0 \Rightarrow N(y) = \frac{F}{S}, y \in (0, l)$$

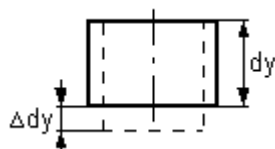
V tomto prípade je priebeh $N(y)$ konštantný po celej dĺžke tyče a je nakreslený na obr. 5.1c. Z výslednice vnútorných síl možno určiť napätie $\sigma(y)$ v jednotlivých myslenných rezoch. Pri prútoch s konštantným prierezom alebo prútoch, ktorých prierez sa málo mení, sila F predlžuje tyč tak, aby sledovaný (pôvodne rovinný prierez) zostal rovinným aj po deformácii. Z podmienky zachovania rovinnosti prierezu vyplýva, že napätie má konštantnú hodnotu v každom bode prierezu (obr. 5.1c) a jeho veľkosť bude

$$\sigma(y) = \frac{F}{S}$$

Jeho priebeh v rezoch po dĺžke tyče je znázornený na obr. 5.1b.

Ako vidieť z priebehov $\sigma(y)$ a $N(y)$ (spôsob ich grafického znázorňovania je zrejmý z obr. 5.1c, d), napätie a osová sila nie je závislá od y . Ako uvidíme neskôr, situácia sa zmení, ak budeme uvažovať aj pôsobenie objemových síl - vlastnej tiaže telesa. Pre tyč podľa obr. 5.1 je nebezpečným prierezom ľubovoľný rez kolmý na os prúta.

Deformáciu tyče - jej celkové predĺženie možno určiť z definície pomerného predĺženia alebo pomocou I. Castiglianovej vety.



Obr.5.2 Pomerné predĺženie

Predĺženie elementu dy (obr. 5.2) vyňatej z ťahanej tyče bude

$$\Delta dy = \epsilon dy$$

Celkové predĺženie potom bude

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dy = \int_0^l \epsilon dy = \int_0^l \frac{\sigma(y)}{E} dy = \int_0^l \frac{N(y)}{E \cdot S} dy = \frac{F l}{S \cdot E}$$

Podľa I. Castiglianovej vety určíme posunutie pôsobiska sily F zo vzťahu

$$\Delta l = \frac{\partial A}{\partial F}$$

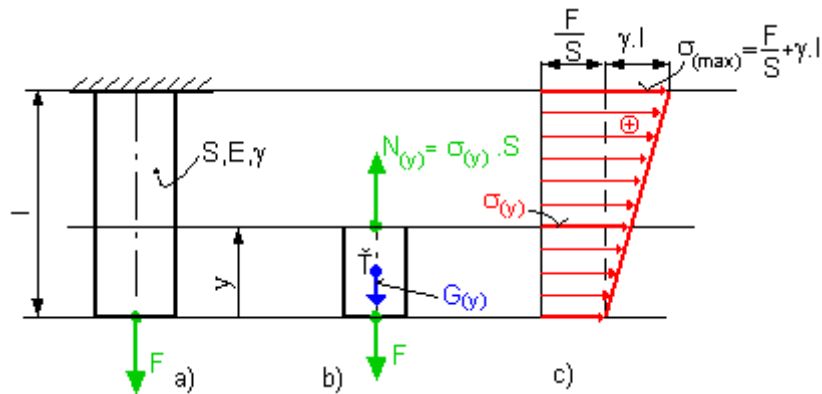
resp.

$$A = \frac{1}{2} \frac{F^2 l}{S \cdot E}, \quad \frac{\partial A}{\partial F} = \frac{F l}{S \cdot E} = \Delta l$$

čo súhlasí s výsledkom získaným z definičného vzťahu pre celkové predĺženie. Priebeh napätia a celkové predĺženie tyče zaťaženej sústavou osových síl možno určiť obdobným spôsobom.

5.2 NAMÁHANIE OSOVOU SILOU F PRI SPOLUPÔSOBNÍ VLASTNEJ TIAŽE TYČE

Uvažujeme tyč vo zvislej polohe, ktorej rozmery a v ich dôsledku vlastná tiaž nie je zanedbateľná voči veľkosti osovej sily F (obr. 5.3). Priebeh napätia určíme opäť metódou mysleného rezu.



Obr.5.3 Vplyv vlastnej tiaže

Z podmienok rovnováhy odrezanej časti tyče (obr. 5.3b) dostaneme:

$$\sum F_{iy} = 0 \quad \sigma(y) \cdot S - F - G(y) = 0$$

kde $G(y)$ je vlastná tiaž odrezanej časti tyče ($\gamma = \rho \cdot g$ je merná tiaž). V našom prípade $G(y) = V(y) \cdot \gamma = S \cdot y \cdot \gamma$. Potom napätie v myslenom reze je:

$$\sigma(y) = \frac{F + \gamma \cdot S \cdot y}{S} = \frac{F}{S} + \gamma \cdot y$$

Priebeh $\sigma(y)$ určíme ako priebeh rovnice priamky v intervale $y \in (0, l)$.

$$y = 0 \dots \dots \dots \sigma(y) = 0$$

$$y = l \dots \dots \dots \sigma(y) = \sigma_{\max} = \frac{F}{S} + \gamma l$$

Priebeh napätia po dĺžke tyče je znázornený na obr. 5.3c. Nebezpečný prierez sa nachádza v mieste maximálneho napätia $\sigma_{\max}$ - v mieste votknutia tyče. Aby nedošlo k porušeniu tyče v nebezpečnom priereze, musí byť splnená pevnostná podmienka

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{S} + \gamma l \leq \sigma_{\text{doz}}$$

Celková energia napätosti tyče je

$$A = A_{\sigma} = \frac{1}{2} \int_0^l \sigma(y) \cdot S dy = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\sigma^2(y)}{E \cdot S} dy = \dots$$

$$A = \frac{1}{2ES} \left[F^2 l + F \gamma S l^2 + \frac{\gamma^2 S^2 l^3}{3} \right]$$

potom celkové predĺženie tyče

$$\Delta l = \frac{\partial A}{\partial F} = \frac{F l}{S E} + \frac{\gamma l^2}{2 E}$$

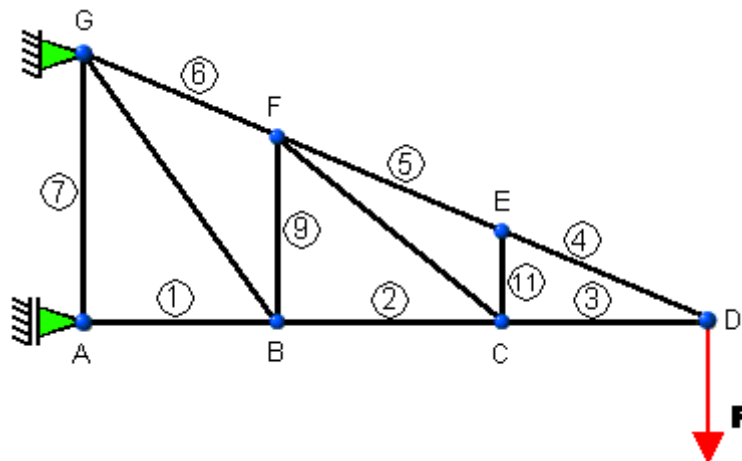
Ten istý výsledok by sme pre celkové predĺženie dostali aj zo vzťahu

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon dy = \dots = \frac{F l}{S E} + \frac{\gamma l^2}{2 E}$$

Z týchto vzťahov je zrejmé, že napätie, resp. celkové predĺženie tyče je rovné súčtu napätí, resp. predĺžení, od osovej sily a vlastnej tiaže, čo je vlastne potvrdením *zákona superpozície účinkov*. *Statically určité úlohy* namáhania osovou silou riešime podľa postupu uvedeného v príkladoch uvedených v tejto kapitole.

5.3 DIMENZOVANIE PRÚTOVÝCH SÚSTAV

Na obr. 5.4 je znázornené rameno stožiaru vysokého napätia. Konštrukčné prvky označené číslicami 1, 2, ..., 11 nazývame *prútmi*. Prúty sú navzájom pospájané v bodoch A, B, ..., G, ktoré nazývame *styčníkmi*. Ak predpokladáme, že prúty sú dostatočne štíhle (rozmery prierezu prúta sú malé oproti jeho dĺžke) a v styčníkoch sú pospájané v kĺboch bez trenia, možno takúto sústavu priamych prútov považovať za *prútovú sústavu*. Pretože ideálne kĺby bez trenia neprenášajú do prútov žiadne momenty vonkajších síl, prúty sú namáhané len osovými silami. Skutočné kostry (stožiar vn, osvetľovacie veže, anténne sústavy, ...) sú však spájané spravidla zvaráním, skrutkovými spojmi a ideálnej prútovej sústave sa viac-menej len približujú. Toto priblíženie bude tým korektnejšie, čím sú prúty štíhlejšie a spojenie styčných bodov je menej tuhé. V opačnom prípade treba uvažovať, že konštrukcia pozostáva z nosníkov.



Obr.5.4 Rameno stožiaru

Pri pevnostnom a tuhostnom návrhu prútových konštrukcií nás zaujíma:

- veľkosť osových síl v prútoch - P_i ($i = 1, \dots, n$ - číslo prúta)
- celkové predĺženie, resp. skrátenie prútov - Δl_i
- posunutie styčníc po zaťažení prútovej sústavy

Používajú sa pritom klasické metódy statiky (styčnicková, priesečná, ...), ktoré sú však čoraz viac nahrádzané numerickými metódami (napr. metóda konečných prvkov). Potom nám klasické metódy slúžia na orientačnú kontrolu správnosti numerického riešenia.

Ak je prútová sústava staticky určitá, na výpočet osových síl stačia klasické vektorové metódy statiky. Pri staticky neurčitých úlohách musíme vziať do úvahy pri výpočte osových síl aj deformačné podmienky. V prípade metódy konečných prvkov do určitej miery odpadajú ťažkosti spojené s návrhom staticky neurčitej prútovej sústavy. Táto metóda riešenia však vyžaduje, aby vnútorná statická určitosť bola $i_{\text{vn}} \leq 3$ (prútovka a ani jej časť nesmie byť mechanizmom).

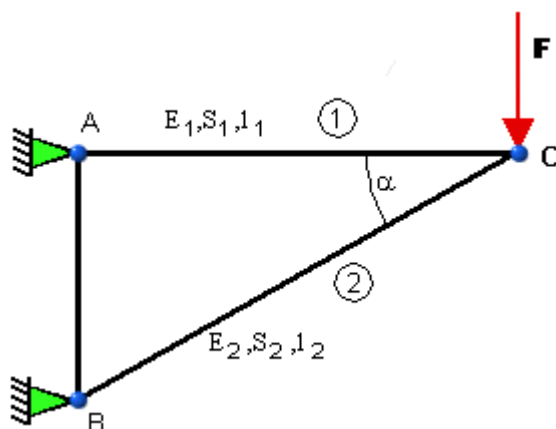
a) Jednoduché prútové sústavy

a1) Staticky určité úlohy

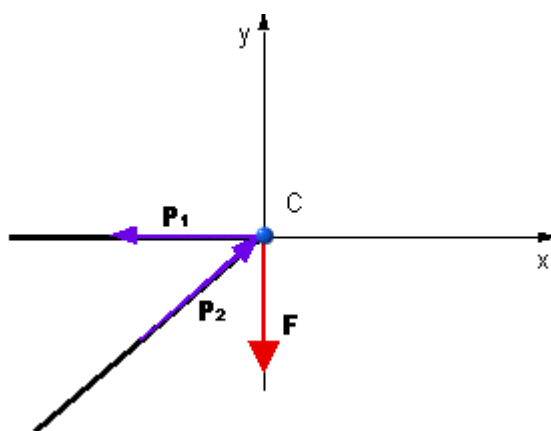
Sily v jednotlivých prútoch staticky určitej prútovej sústavy určíme z rovnováhy uvoľnených styčnickov, pričom účinok prútov nahradíme osovými silami. Ak poznáme osovú silu v jednotlivých prútoch, môžeme určiť predĺženia, resp. skrátenia prútov.

Příklad 1

Určite osovú silu v prútoch 1 a 2, zvislé a vodorovné posunutia styčníka C prútovej sústavy (obr. 5.5) zaťaženej silou F , ak vlastnú tiaž prútov neuvažujeme.



Obr.5.5 Prútovka



Obr.5.6 Rovnováha styčníka

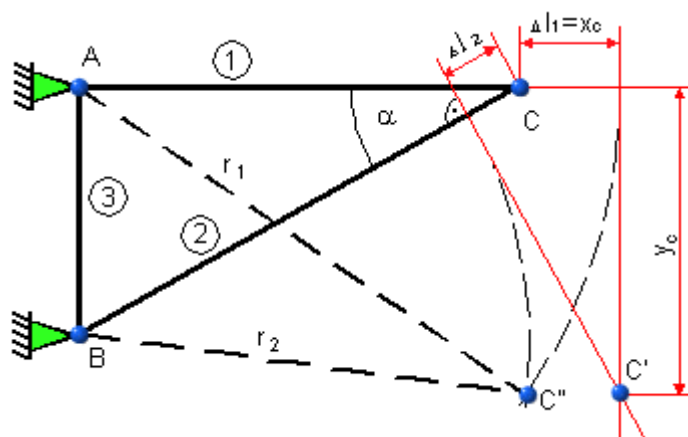
Uvoľníme styčník C a vložíme do neho v predpokladanom smere pôsobenia osovú silu (tlaková sila smeruje do styčníka, ťahová sila smeruje von zo styčníka) P_1 a P_2 (obr. 5.6). Zo statických podmienok rovnováhy dostaneme:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0: & -P_1 + P_2 \cos \alpha &= 0 \\ \sum F_y &= 0: & -F + P_2 \sin \alpha &= P_2 = \frac{F}{\sin \alpha} \\ P_1 &= P_2 \cos \alpha = F \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{F}{\operatorname{tg} \alpha}\end{aligned}$$

Osové sily vyšli so znamienkom $+$, preto podľa úvodného predpokladu v prúte číslo 1 je ťah a v prúte č. 2 je tlak.

Posunutie styčníka určíme z predĺženia, resp. skrátenia prútov 1 a 2. Predĺženia prútov sú:

$$\begin{aligned}\Delta l_1 &= \frac{P_1 l_1}{E_1 S_1} = \frac{F l_1}{E_1 S_1 \sin \alpha} \\ \Delta l_2 &= \frac{P_2 l_2}{E_2 S_2} = \frac{F l_2}{E_2 S_2 \operatorname{tg} \alpha}\end{aligned}$$



Obr.5.7 Posunutie styčníka

Na určenie pretvorenia sústavy stačí opísať kružnice z bodov A a B (obr. 5.7) s polomerami:

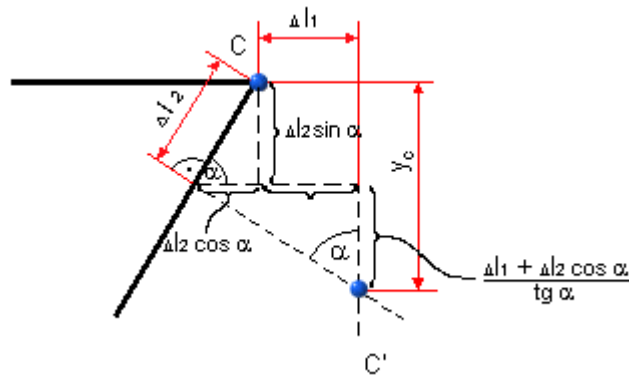
$$\begin{aligned}r_1 &= l_1 + \Delta l_1 = l_1 \left(1 + \frac{F}{E_1 S_1 \sin \alpha} \right) \\ r_2 &= l_2 - \Delta l_2 = l_2 \left(1 - \frac{F}{E_2 S_2 \operatorname{tg} \alpha} \right)\end{aligned}$$

Keďže deformácie musia byť malé, možno kružnice nahradiť dotyčnicami kolmými na prúty nedeformovanej sústavy (obr. 5.7, 5.8).

Potom vodorovné posunutie

$$x_c = \Delta l_1 = \frac{F l_1}{E_1 S_1 \sin \alpha}$$

Zvislé posunutie vypočítame z geometrických závislostí vo zväčšenej mierke nakresleného štvoruholníka.



Obr.5.8 Geometrická závislosť

Zvislé posunutie bude:

$$y_c = \Delta l_2 \sin \alpha + \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2 \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Příklad 2

Určite sily v prútoch prútovej sústavy podľa obr. 5.9, ako aj vodorovné a zvislé posunutie styčníc C a B, ak všetky prúty zohrejeme o rovnaký teplotný rozdiel z teploty t_0 na teplotu t .

Zo statických podmienok rovnováhy uvoľnených styčníc zistíme, že osovú silu v prútoch sú nulové. (Ak zohrejeme prúty *staticky určitej prútovej sústavy* o rovnaký teplotný rozdiel, osovú silu od teplotného zaťaženia sú rovné nule. Pre staticky neurčité prútovej sústavy to však neplatí). Posunutie styčníc je dané predĺžením jednotlivých prútov vplyvom teplotnej rozťažnosti:

$$\Delta l_1 = \alpha_1 (t - t_0) l_1$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \alpha_2 (t - t_0) l_2$$

$$\Delta l_3 = \alpha (t - t_0) l_3$$

Posunutie styčníka C:

$$x_C = \Delta l_1$$

$$y_C = \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{(\Delta l_1 - \Delta l_2 \cos \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha}$$

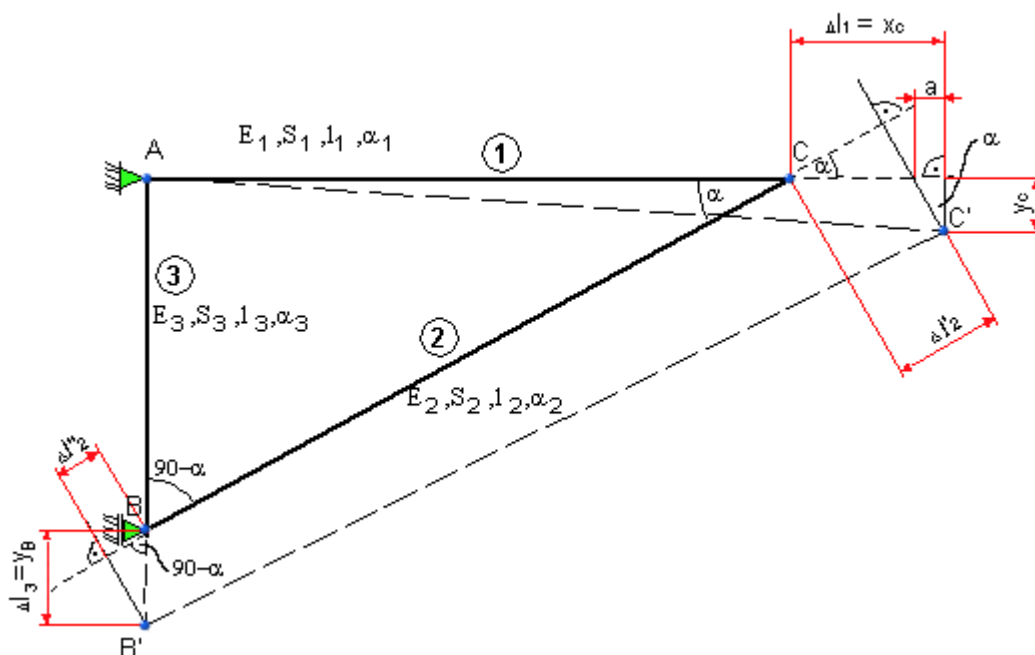
Posunutie styčníka B:

$$x_B = 0$$

$$y_B = \Delta l_3$$

pričom

$$\Delta l_2' = \Delta l_2 - \Delta l_2'' = \Delta l_2 - \Delta l_3 \cos (90^\circ - \alpha) = \Delta l_2 - \Delta l_3 \sin \alpha$$



Obr.5.9 Posunutie styčnícov

a2) Staticky neurčité úlohy

Jednoduché prútové sústavy, pri ktorých nemožno určiť osovú silu v prútoch len zo statických podmienok rovnováhy, nazývame staticky neurčitými. V tomto prípade musíme statické podmienky rovnováhy styčníka doplniť deformačnými podmienkami (musí byť zohľadnená podmienka neporušenosti spojenia prútov v styčníkoch po deformácii). Celkový počet rovníc musí byť totožný s celkovým počtom neznámych osových síl v styčníku.

Příklad 1

Stanovte sily v prútoch sústavy podľa obr. 5.10 zaťaženej silou F .

Z podmienok rovnováhy uvoľneného styčníka (obr. 5.11) máme:

$$1. \sum F_x = 0: \quad -P_2 \sin \alpha + P_3 \sin \alpha = 0 \Rightarrow P_2 = P_3 = P$$

$$2. \sum F_y = 0: \quad P_1 + P_2 \cos \alpha + P_3 \cos \alpha - F = 0 \Rightarrow P_1 + 2P \cos \alpha = F$$

Pretože máme tri neznáme sily, musíme napísať tretiu, dopĺňujúcu rovnicu. Z posunutia styčníka C (obr. 5.10) vidíme, že

$$\Delta l_1 = \frac{P_1 l_1}{S_1 E_1}$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l = \frac{P l}{E S}$$

$$3. \quad \frac{\Delta l}{y_c} = \cos \alpha \Rightarrow \Delta l = y_c \cdot \cos \alpha \Rightarrow \frac{P l}{E S} = \frac{P_1 l_1}{S_1 E_1} \cdot \cos \alpha$$

Dosadením za P_1 z rovnice 1. do rovnice 3. máme:

$$\frac{P l}{E S} = \frac{(F - 2P \cos \alpha) l_1}{E_1 S_1}$$

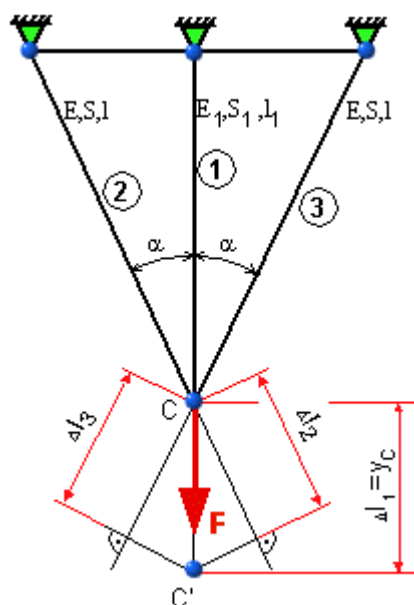
resp.

$$P = P_2 = P_3 = \frac{F l_1}{E_1 S_1} \cdot \frac{1}{\left[\frac{l}{E S} + \frac{2 l_1 \cos \alpha}{E_1 S_1} \right]}$$

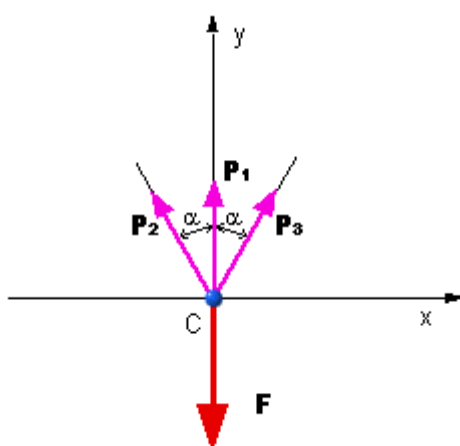
Osové sily vyšli so znamienkom +, to znamená, že pôsobia v smere zvolenom na obr.5.11. Vo všetkých troch prútoch je ťah. Pevnostná podmienka pre návrh prútoch bude

$$\sigma_i = \frac{P_i}{S_i} \leq \sigma_{\text{doz}}$$

kde index i označuje číslo prúta.



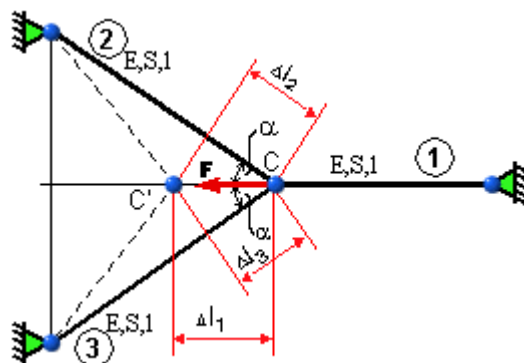
Obr.5.10 Staticky neurčitá úloha



Obr.5.11 Uvoľnený styčník

Príklad 2

Určite osové sily prútovej sústavy podľa obr. 5.12 zaťaženej silou F .



Obr. 5.12 Posunutie styčníka

Z rovnováhy uvoľneného C styčníka máme (obr. 5.11):

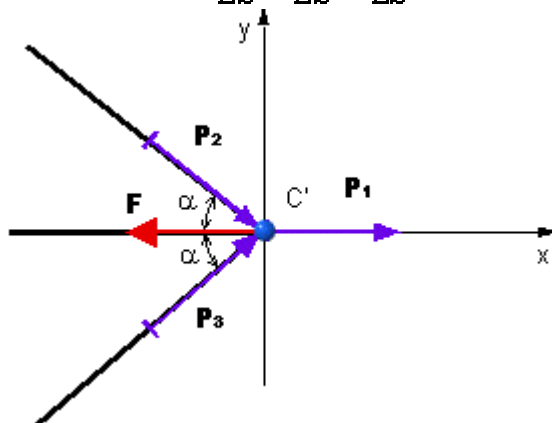
1. $\sum F_x = 0: P_1 - F + P_2 \cos \alpha + P_3 \cos \alpha = 0$
2. $\sum F_y = 0: P_2 \cos \alpha - P_3 \sin \alpha = 0 = P_2 = P_3 = P$

Dosadením do rovnice 1. máme:

$$P_1 = F - 2P \cos \alpha$$

V tejto rovnici sú dve neznáme, preto napíšeme deformačnú podmienku, ktorá vyplýva z celkových predĺžení, resp. skrátení prútov:

$$\Delta l_1 = \frac{P_1 l}{ES}$$
$$\Delta l_2 = \frac{P_2 l}{ES} = \frac{P_3 l}{ES} = \frac{Pl}{ES}$$



Obr. 5.13 Rovnováha styčníka

Pre posunutie styčníka C teda platí:

$$x_C = \Delta l_1 = \frac{\Delta l_2}{\cos \alpha} = \frac{Pl}{ES \cos \alpha} = \frac{P_1 l}{ES}$$

Odtiaľ

$$P = P_1 \cos \alpha = (F - 2P \cos \alpha) \cos \alpha$$

a po úprave

$$P = P_2 = P_3 = \frac{F \cos \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha}$$

$$P_1 = \frac{F}{1 + 2 \cos^2 \alpha}$$

Osové sily vyšli so znamienkom +, to znamená, že pôsobia v tom zmysle, ako sme ich zakreslili na obr. 5.13. V prúte 1 je ťah, v prútoch 2 a 3 je tlak.

Príklad 3

Určite sily v prútoch prútovej sústavy podľa obr. 5.14, ak prút č. 1 bol ohriaty o teplotný rozdiel Δt . Teplotná rozťažnosť materiálu je α .

Z rovnováhy uvoľneného styčníka máme (obr. 5.13):

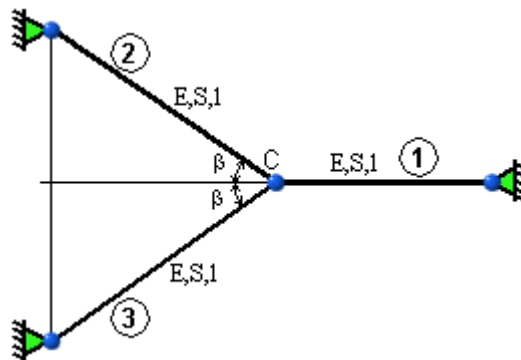
$$1. \sum F_x = 0: \quad -P_1 + P_2 \cos \beta + P_3 \cos \beta = 0$$

$$2. \sum F_y = 0: \quad -P_2 \sin \beta + P_3 \sin \beta = 0$$

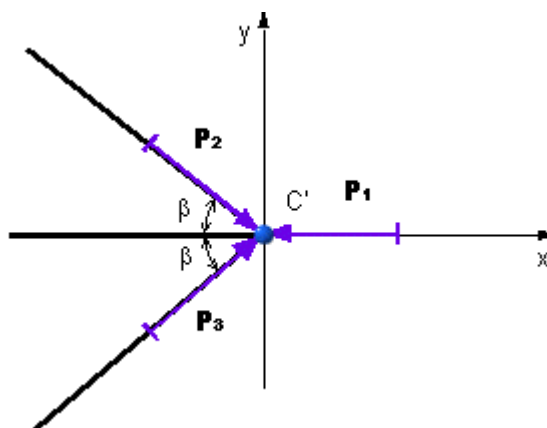
$$P_2 = P_3 = P$$

Z rovnice 1. dostaneme

$$P_1 = 2P \cos \beta$$



Obr.5.14 Prútová sústava



Obr.5.15 Uvoľnený styčník

Na výpočet troch neznámych síl musíme podmienky rovnováhy doplniť deformačnou podmienkou. Predĺženia prútov sú:

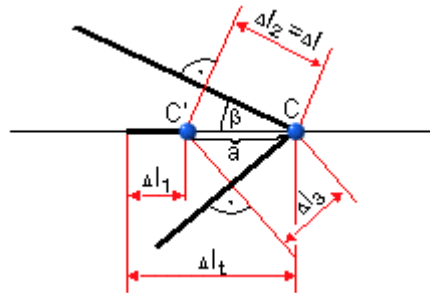
$$\Delta l_1 = \frac{P_l l}{ES}$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l = \frac{Pl}{ES}$$

Posunutie styčnika zistíme z tejto úvahy: Keby prút 1 bol uložený voľne v priestore, vplyvom ohriatia by sa predĺžil o hodnotu

$$\Delta l_t = \alpha l \Delta t$$

Vo voľnej deformácii mu však bránia prúty 2 a 3. Bude v ňom pritom vznikať tlaková sila, ktorá zníži veľkosť teplotného predĺženia Δl_t o hodnotu Δl_1 (obr. 5.16).



Obr.5.16 Skrátenie prúta

Potom

$$3. \quad \frac{\Delta l}{a} = \cos \beta$$

$$a = \Delta l_t - \Delta l_1 = \alpha l \Delta t - \frac{P_l l}{ES}$$

$$\Delta l = a \cdot \cos \beta \Rightarrow \frac{Pl}{ES} = \left(\alpha l \Delta t - \frac{P_l l}{ES} \right)$$

Dosadením za P_l do rovnice 3. a po úpravách dostaneme:

$$P_1 = \frac{2\alpha \Delta t \cdot ES \cos \beta}{1 + 2 \cos \beta}$$

$$P_2 = P_3 = P = \frac{\alpha \Delta t \cdot ES}{1 + 2 \cos \beta}$$

Veľkosť osových síl je priamo úmerná veľkosti teplotného rozdielu. Treba upozorniť, že pri staticky neurčitých prútočkách vnikajú značné osovú sily už pri relatívne malých teplotných rozdieloch Δt .

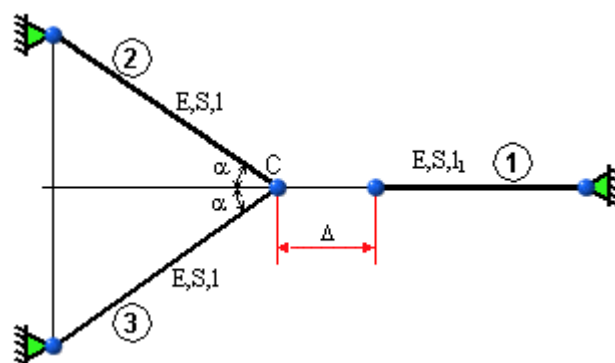
Príklad 4

Určite sily v prútoch, ak prút č. 1 bol vyrobený o hodnotu Δ kratší (obr. 5.17). Z obr. 5.17 je zrejmé, že spojenie prútov v spoločnom styčniku musí byť násilné. Prút č. 1 sa musí predĺžiť o hodnotu

$$\Delta l_1 = \frac{P_{l1} l}{ES}$$

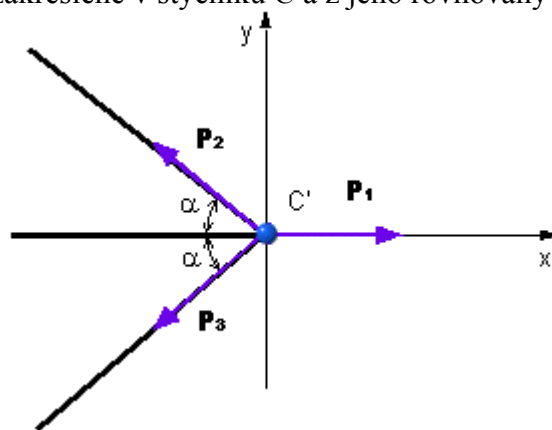
a prúty 2 a 3 o hodnotu

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l = \frac{Pl}{ES}$$



Obr.5.17 Vplyv výrobnnej nepresnosti

Sily P_1 a $P_2 = P_3 = P$ sú zakreslené v styčníku C a z jeho rovnováhy vyplýva (obr. 5.18):



Obr.5.18 Rovnováha styčníka

$$1. \sum F_x = 0: \quad P_1 - P_2 \cos \beta - P_3 \cos \beta = 0$$

$$2. \sum F_y = 0: \quad P_2 \sin \beta - P_3 \sin \beta = 0$$

$$\text{z 1. rovnice: } P_1 = 2P \cdot \cos \alpha$$

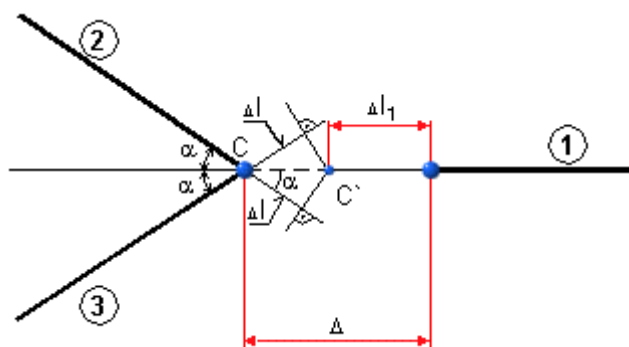
$$\text{z 2. rovnice: } P_2 = P_3 = P$$

Rovnice rovnováhy doplníme deformačnou podmienkou, ktorá vyplýva z obr. 5.19.

$$3. \Delta = a + \Delta l_1, \text{ pričom } a = \frac{\Delta l}{\cos \alpha} = \frac{Pl}{ES \cdot \cos \alpha}$$

Potom

$$\Delta = \frac{Pl}{ES \cdot \cos \alpha}$$



Obr. 5.19 Poloha styčníka

Dosadením za P_1 a po úpravách dostaneme:

$$P_1 = \frac{\Delta ES \cdot 2 \cdot \cos^2 \alpha}{l(1 + 2 \cdot \cos^2 \alpha)}$$

$$P_2 = P_3 = P = \frac{\Delta ES \cdot \cos \alpha}{l(1 + 2 \cdot \cos^2 \alpha)}$$

Ako vidíme, veľkosť osových síl je priamo úmerná veľkosti nepresnosti Δ .

Poznámka: Ak je prútovka namáhaná súčasne vonkajšími silami, teplotou, prípadne aj prúty sú vyrobené nepresne, výsledné osovú sily budú dané superpozíciou osových síl od jednotlivých prípadov zaťaženia.

b) Zložité prútové sústavy

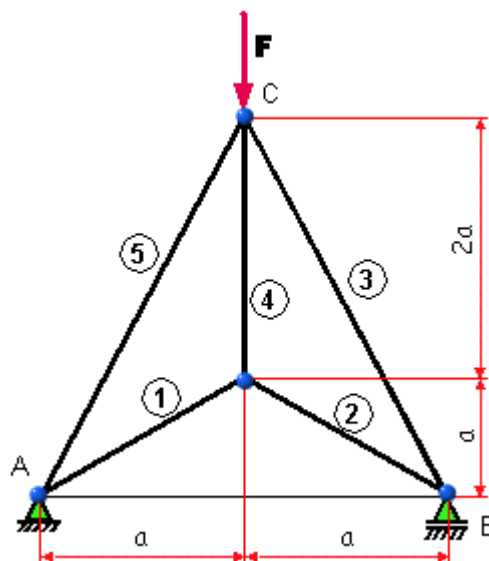
b1) Staticky určité úlohy

Rovinná prútová sústava je staticky určitá, keď $i_{vo} = 0$, $i_{vn} = 3$. Osovú sily v prútoch určíme klasickými metódami statiky (styčnicková, priesečná, princíp virtuálnych prác, a iné). Vzhľadom na prácnosť ich aplikácie pri prútočkách s veľkým počtom prútov, ich hlavné využitie je na kontrolu výsledkov riešenia dosiahnutých numerickými metódami, napr. metódou konečných prvkov.

Príklad 1

Pre prútovú sústavu podľa obr. 5.20 určite:

- statickú určitosť
- osové sily v prútoch
- prierezy prútov tak, aby $\sigma_i \leq \sigma_{dv}$
- posunutia styčníka C



Obr.5.20 Zadanie úlohy

a) Statická určitost'

Vonkajšia statická určitost' (väzby A a B odoberajú tri stupne voľnosti) je

$$i_{vp} = 3 - 2 - 1 = 0$$

Vnútoraná statická určitost'

$$i_{vn} = 3 \cdot p - 2 \cdot (2k_2 + k_1) = 3 \cdot 5 - 2(2 \cdot 2 + 2) = 3$$

prútová sústava je staticky určitá.

b) Osové sily

Na výpočet osových síl použijeme styčnickovú metódu. Pre riešenie rovnováhy styčníka A a B musíme určiť väzbové reakcie. Väzbové reakcie R_{AX} , R_{AY} a R_B musia byť v statickej rovnováhe so zaťažujúcou silou F (obr. 5.21).

$$\sum F_x = 0: R_{AX} = 0$$

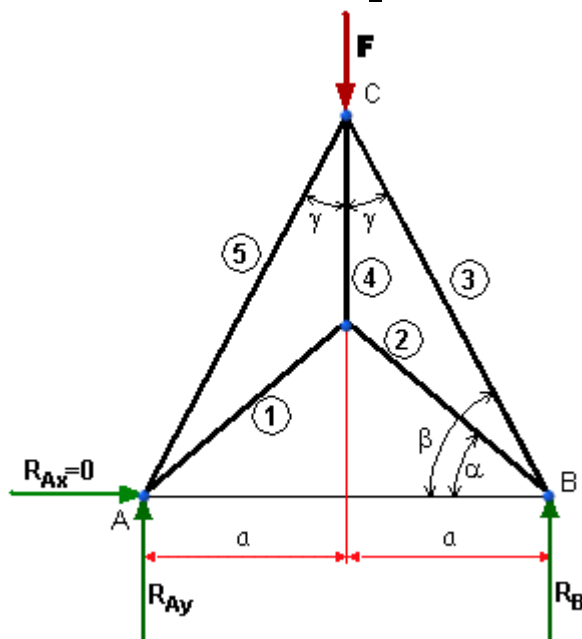
$$\sum F_y = 0: R_{AY} + R_B - F = 0$$

$$\sum M_B = 0: R_{AY} \cdot 2a - F = 0$$

$$R_{AY} = \frac{F}{2}$$

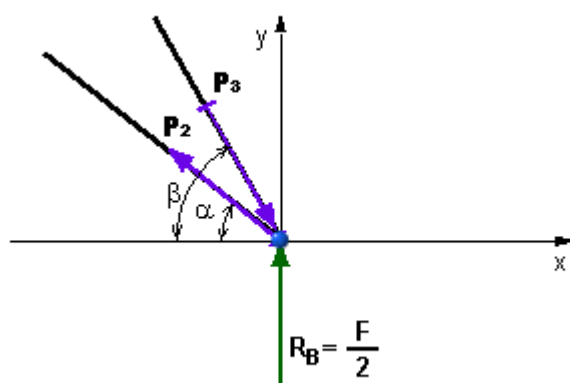
Vzhľadom na symetriu úlohy

$$R_B = R_{AY} = \frac{F}{2}$$



Obr.5.21 Väzbové reakcie

Rovnováha styčníka B



Obr. 5.22 Rovnováha styčníka B

$$\sum F_x = 0: P_2 \cos \alpha - P_3 \cos \beta = 0$$

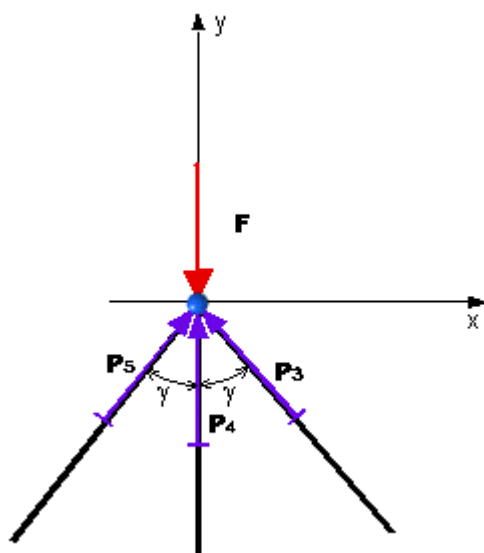
$$\sum F_y = 0: \frac{F}{2} - P_2 \sin \alpha + P_3 \sin \beta = 0$$

Z dvou rovnic o dvou neznámých možno určit osové sily:

$$P_2 = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot \frac{F}{2(\cos \beta \operatorname{tg} \alpha - \sin \beta)}$$

$$P_3 = \frac{F}{2(\cos \beta \operatorname{tg} \alpha - \sin \beta)}$$

V prúte 2 je ťah a v prúte 3 je tlak. Vzhľadom na symetriu úlohy možno predpokladať, že $P_2 = P_1$, $P_3 = P_5$. Silu v prúte 4 určíme z rovnováhy styčníka (obr. 5.23):



Obr. 5.23 Rovnováha styčníka C

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & P_5 \sin \gamma - P_3 \sin \gamma = 0 \\ & P_5 = P_3 \\ \sum F_y = 0: & -F - P_4 + 2P_3 \cos \gamma = 0 \\ & P_4 = 2P_3 \cos \gamma - F = F \left(\frac{2 \cos \gamma}{2(\cos \beta \operatorname{tg} \alpha - \sin \beta)} - 1 \right) \\ & P_4 = F \frac{(\cos \gamma - \cos \beta \operatorname{tg} \alpha + \sin \beta)}{\cos \beta \operatorname{tg} \alpha - \sin \beta}\end{aligned}$$

c) Prierezy prútov

Prierezy prútov určíme z pevnostnej podmienky $\sigma_i \leq \sigma_{\text{dov}}$:

$$\begin{aligned}\frac{P_1}{S_1} \leq \sigma_{\text{dov}} &\Rightarrow S_1 \geq \frac{P_1}{\sigma_{\text{dov}}}: & S_1 = S_2 \\ \frac{P_3}{S_3} \leq \sigma_{\text{dov}} &\Rightarrow S_3 \geq \frac{P_3}{\sigma_{\text{dov}}}: & S_3 = S_5 \\ \frac{P_4}{S_4} \leq \sigma_{\text{dov}} &\Rightarrow S_4 \geq \frac{P_4}{\sigma_{\text{dov}}}\end{aligned}$$

d) Posunutie styčníka C

Bod C sa posunie v zvislom smere o hodnotu x_C , ktorá podľa I. Castiglianovej vety bude

$$x_C = \frac{\partial A}{\partial F}$$

pričom celková energia napätosti prútovej sústavy bude rovná súčtu energií napätosti jednotlivých prútov namáhaných čistým ťahom, resp. tlakom

$$A = \sum_{i=1}^5 \frac{P_i^2 l_i}{2S_i E_i}$$

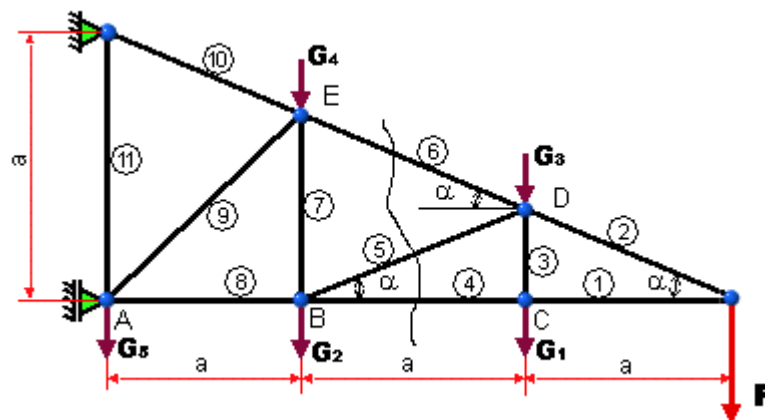
Potom

$$x_C = \frac{\partial}{\partial F} \left(\sum_{i=1}^5 \frac{P_i^2 l_i}{2S_i E_i} \right) = \sum_{i=1}^5 \frac{P_i^2 l_i}{2S_i E_i} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial F} = \sum_{i=1}^5 \Delta l_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial F}$$

Kde Δl_i sú predĺženia, resp. skrátenia i-tého prúta a $\frac{\partial P_i}{\partial F}$ je parciálna derivácia osovej sily v i-tom prúte podľa sily F . E_i a S_i je modul pružnosti v ťahu, resp. prierez i-tého prúta.

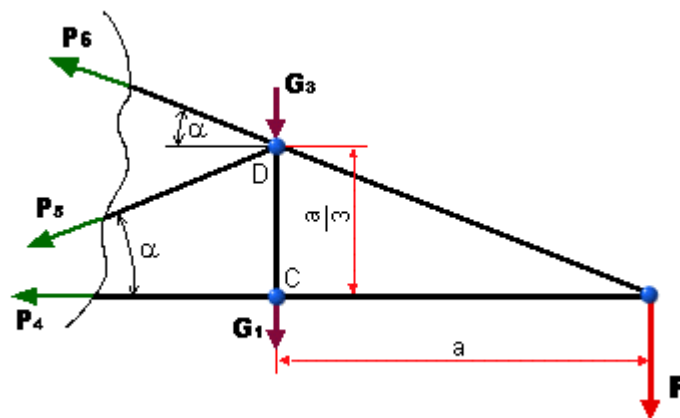
Príklad 2

Rameno stožiaru vysokého napätia je zaťažené tiažou vodiča F a vlastnou tiažou prútov, ktorá je rozdelená do styčníkov A, B, C, D a E (obr. 5.24). Určite osové sily v prútoch **4**, **5** a **6** priesečnú metódou. Výpočet má slúžiť ako kontrola numerického riešenia.



Obr. 5.24 Zadanie úlohy

Ako možno výpočtom zistiť, prútová sústava je staticky určitá. Osové sily v prútoch 4, 5 a 6 určíme tak, že rozrežeme rameno myslenným rezom na dve polovice a riešime rovnováhu odrezanej časti (obr. 5.25):



Obr. 5.25 Rovnováha odrezanej časti ramena

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & \quad P_6 \cos \alpha + P_5 \cos \alpha + P_4 = 0 \\ \sum F_y = 0: & \quad -F - G_1 - G_3 + P_6 \sin \alpha - P_5 \sin \alpha = 0 \\ \sum M_B = 0: & \quad Fa + P_4 \frac{a}{3} = 0 \\ & \quad P_4 = -3F\end{aligned}$$

Riešením rovníc 1 a 2 máme:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \alpha \\ \sin \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_6 \\ P_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3F \\ F_1 + G_1 + G_3 \end{bmatrix}$$

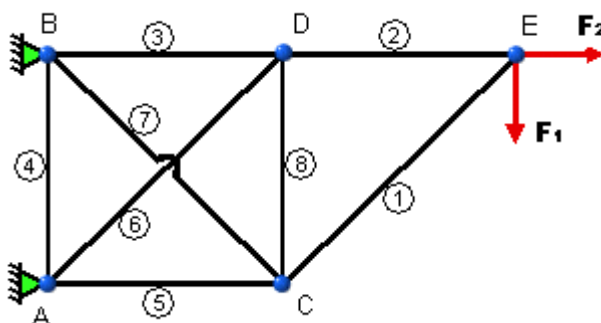
odkiaľ

$$P_5 = \frac{F(3tg\alpha - 1) - G_1 - G_2}{2\sin\alpha}$$

$$P_6 = \frac{3F}{\cos\alpha} - P_5$$

b2) Staticky neurčité úlohy

Uvažujme prútovú sústavu podľa obr. 5.26. Ako vidieť, prútová sústava je tak po vonkajšej, ako aj po vnútornej stránke staticky neurčitá:



Obr. 5.26 Zadanie úlohy

$$i_{wp} = 3 - 2 - 2 = -1$$

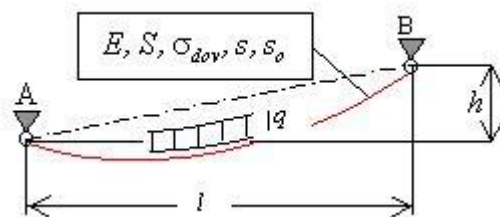
$$i_{vn} = 3.p - 2(3k_3 + 2k_2 + k_1) = 3.8 - 2(3.2 + 2.2 + 1) = 2$$

Prútová sústava je raz po vonkajšej stránke staticky neurčitá a raz vnútorne staticky neurčitá. Na výpočet osových síl treba doplniť statické podmienky rovnováhy dvoma deformačnými podmienkami. Obvykle sa takéto prútovky riešia Castiglianovou vetou. Najvýhodnejšie je však použiť numerické metódy, a preto sa v tomto texte nebudeme zaoberať analytickým riešením staticky neurčitých prútových sústav. Podstata pevnostného a tuhostného návrhu staticky neurčitých prútových sústav je rovnaká ako pri staticky určitých úlohách. Staticky neurčité prútové sústavy sú z hľadiska pevnosti a tuhosti často výhodnejšie konštrukcie, zložitejšia je však ich statická analýza pôvodnými analytickými metódami. Preto prevládalo v minulosti úsilie navrhovať sústavy staticky určité. S rozvojom numerických metód však tento problém odpadá.

5.4 TIAŽOVÉ PARABOLICKÉ REŤAZOVKY

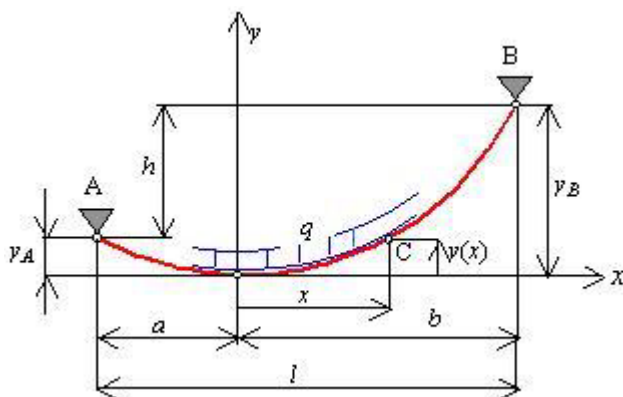
5.4.1 Prijaté predpoklady a mechanický model reťazovky

Pri rozvoze elektrickej energie ako aj v bežnej technickej praxi sa stretávame s prvkami namáhanými na ťah, ktorý je spôsobený najmä vlastnou tiažou. Tieto prvky ako sú napríklad vodiče napätia, nosné laná a pod., možno považovať za dokonale ohybné vlákna konštantného prierezu zaťažené vlastnou tiažou samotného vlákna, ako aj dodatočným po dĺžke vlákna rovnomerne rozloženým spojitým zaťažením q (napr. tiaž námrazy). Takéto vlákno nie je schopné prenášať ohybový moment, a bude prenášať len čistý ťah.



Obr.5.27 Tiažová reťazovka

Vlákno (reťazovka) je uchytená v bodoch A a B, ktorých rozpätie je l a prevýšenie upevnenia je h . Ak pôvodná (priama) dĺžka vlákna bola s_0 , po jej zavesení vplyvom vertikálnej pôsobiacej tiaže sa ustáli v deformovanom tvare s novou dĺžkou vlákna s (obr.5.27). Ak je priehyb vlákna proti rozpätiu malý, potom rozdiel medzi dĺžkou s a dĺžkou priamej spojnice bodov A a B je malý. Ak uvedený rozdiel je menší ako 10%, možno s dostatočnou presnosťou predpokladať, že tiaž vlákna, eventuálne námrazy, je rovnomerne rozložená po dĺžke priemetu vlákna do vodorovnej osi a nie po dĺžke krivky. Materiál vlákna je definovaný modulom pružnosti E , pričom dovolené namáhanie vlákna je σ_{dov} , a prierez vlákna je S . Na obr.5.28 je znázornený mechanický model tiažovej reťazovky. Počiatok vzťažného súradnicového systému bol zvolený v najnižšom bode reťazovky, ktorého poloha zatiaľ nie je známa.



Obr.5.28 Mechanický model reťazovky

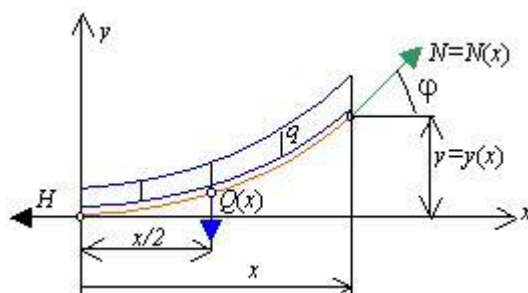
Z hľadiska elastostatiky tiažovej reťazovky treba určiť:

- rovniciu deformovaného tvaru reťazovky $y = y(x)$ a maximálny priehyb y_{max}
- veľkosť osovej sily $N = N(x)$ v ľubovoľnom mieste x a jej maximálnu a minimálnu hodnotu
- priebeh normálového (ťahového) napätia a jeho maximálnu a minimálnu hodnotu
- väzbové reakcie v bodoch uchytenia A a B
- celkové predĺženie reťazovky

5.4.2 Rovnica deformovaného tvaru reťazovky

Na obr.5.29 je znázornená vybratá časť reťazovky dvoma myslenými rezmi. Vonkajšie spojité zaťaženie (napr. vlastná tiaž) musí byť v statickej rovnováhe s vnútornými osovými silami: H

je normálová osová sila v reze v najnižšom bode reťazovky, $N(x)$ je normálová osová sila (pôsobí v smere dotyčnice k priehybovej čiare) v mieste x . Spojité zaťaženie q nahradíme výslednicou $Q(x) = q \cdot x$, pôsobiacou v ťažisku vybratej časti reťazovky.



Obr.5.29 Rovnováha vybratej časti reťazovky

Pre vybratú časť reťazovky možno napísať tri statické podmienky rovnováhy:

$$\sum F_x = 0: \quad -H + N \cos \varphi = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad -q \cdot x + N \sin \varphi = 0$$

$$\sum M_{ic} = 0: \quad -H \cdot y + q \frac{x^2}{2} = 0$$

Z momentovej rovnice rovnováhy k bodu C možno určiť rovnicu priehybovej čiary reťazovky:

$$y = y(x) = \frac{q}{2H} x^2$$

Čo predstavuje rovnicu paraboly. Vlákna, spĺňajúce túto rovnicu nazývame parabolické reťazovky.

V prípade známej osovej sily H možno z rovnice reťazovky určiť polohu bodov A, B a prevýšenie h :

$$\text{pre } x = b \dots y(x) = y_B = \frac{qb^2}{2H}$$

$$\text{pre } x = -a \dots y(x) = y_A = \frac{qa^2}{2H}$$

$$h = y_B - y_A = \frac{q}{2H} (b^2 - a^2)$$

5.4.3 Osová sila v reťazovke

Zo silových rovníc vyplýva:

$$H = N \cos \varphi$$

$$qx = N \sin \varphi$$

Umocnením a sčítaním týchto dvoch rovníc dostaneme

$$N = N(x) = \sqrt{H^2 + (qx)^2} = H \sqrt{1 + (qx)^2}$$

Je zrejmé, že ak:

$$x = -a \quad N(x) = H \sqrt{1 + \left(\frac{qa}{H}\right)^2} = N_A$$

$$x = b \quad N(x) = H \sqrt{1 + \left(\frac{qb}{H}\right)^2} = N_B$$

$$x = 0 \quad N(x) = H = N_{\min} - \text{minimálna osová sila}$$

Za predpokladu $b > a$ je $N_B > N_A$, a teda $N_B = N_{\max}$ - maximálna osová sila.

Z uvedeného vyplýva, že minimálna osová sila je v najnižšom bode reťazovky a maximálna osová sila je vo vyššom zavesení reťazovky.

5.4.4 Normálové napätie v reťazovke

Priebeh normálového napätia bude úmerný priebehu osových síl:

$$\sigma = \sigma(x) = \frac{N(x)}{S}$$

$$\text{pričom pre } x = -a \text{ je } \sigma(x) = \sigma_A = \frac{N_A}{S}$$

$$x = b \quad \text{je } \sigma(x) = \sigma_B = \frac{N_B}{S} = \sigma_{\max} - \text{maximálne napätie}$$

$$x = 0 \quad \text{je } \sigma(x) = \frac{H}{S} = \sigma_{\min} - \text{minimálne napätie}$$

Pevnostná podmienka reťazovky má potom tvar

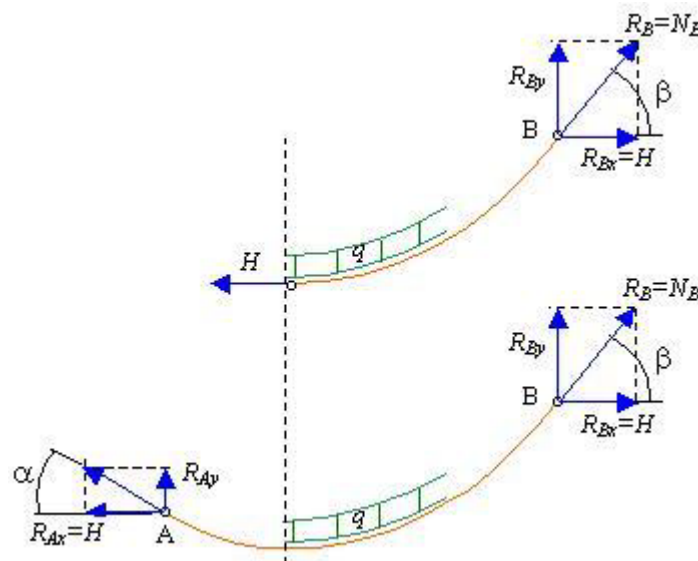
$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{dov}}$$

$$\frac{N_B}{S} \leq \sigma_{\text{dov}}$$

Splnenie tejto podmienky zaručuje dostatočnú pevnosť reťazovky po jej celej dĺžke. Dovoľené napätie je obvykle predpísané normou STN.

5.4.5 Väzbové reakcie

Na obr.5.30 je uvoľnená reťazovka s väzbovými reakciami v bodoch A a B.



Obr.5.30 Väzbové reakcie

Z podmienky rovnováhy do osi x vyplýva: $R_{Bx} = R_{Ax} = H$

Keďže väzbová reakcia v bode A musí byť v rovnováhe s osovou silou N_A , potom $R_A = N_A$, resp. v bode B je $R_B = N_B$

Potom zvislé zložky reakcií sú:

$$R_{Ay} = \sqrt{N_A^2 - H^2}$$

$$R_{By} = \sqrt{N_B^2 - H^2}$$

a ďalej

$$\cos \alpha = \frac{H}{N_A}$$

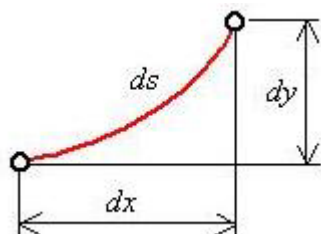
$$\cos \beta = \frac{H}{N_B}$$

čím je daný sklon priechybovej čiary v závesoch A a B.

5.4.6 Celkové predĺženie reťazovky

Celkové predĺženie reťazovky bude $\Delta s = s - s_0$, kde s_0 je pôvodná (nedeformovaná) dĺžka vlákna, a s je nová dĺžka vlákna po jeho predĺžení od vlastnej tiaže.

Na obr.5.31 je znázornená elementárna časť deformovaného vlákna.



Obr.5.31 Elementárna časť vlákna

Celková dĺžka zaťaženej reťazovky je

$$s = \int_{(s)} ds = \int_{(s)} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{-a}^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \int_{-a}^b \sqrt{1 + \left(\frac{q}{H} x\right)^2} dx$$

Použijúc zjednodušujúce pravidlo $(1 + p)^a = 1 + p \cdot a$ na druhý člen pod odmocninou

$$p = y'(x) = \frac{qx}{H} \ll 1 \quad ; \quad n = \frac{1}{2}$$

potom

$$s = \int_{-a}^b \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{q}{H} x \right)^2 \right] dx = \dots = l + \frac{1}{6} \left(\frac{q}{H} \right)^2 (b^3 + a^3)$$

pričom $l = a + b$.

Podobne, celkové predĺženie

$$\Delta s = \int_{(s)} \Delta ds = \int_{(s)} \varepsilon ds = \int_{(s)} \frac{\sigma(x)}{E} ds = \int_{(s)} \frac{N(x)}{SE} ds$$

Pretože

$$N(x) = H \sqrt{1 + \left(\frac{qx}{H}\right)^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{qx}{H}\right)^2} dx$$

potom

$$\Delta s = \frac{H}{SE} \int_{-a}^b \sqrt{1 + \left(\frac{qx}{H}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{qx}{H}\right)^2} dx = \frac{H}{SE} \int_{-a}^b \left[1 + \left(\frac{qx}{H}\right)^2\right] dx = \dots$$

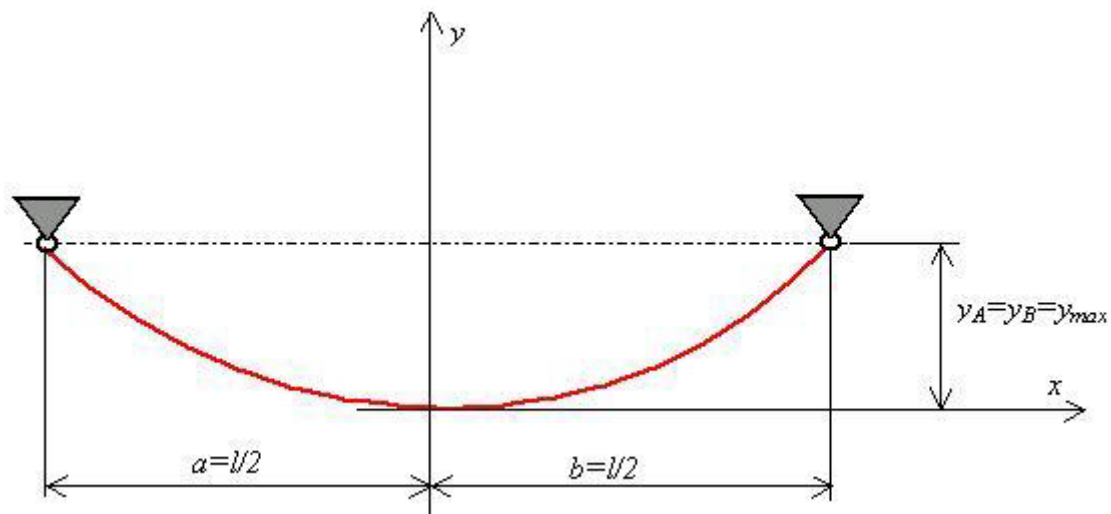
$$\Delta s = \frac{H}{SE} \left[l + \frac{1}{3} \left(\frac{q}{H}\right)^2 (b^3 + a^3) \right]$$

Pôvodná dĺžka reťazovky je

$$s_0 = s - \Delta s = l + \frac{1}{6} \left(\frac{q}{H}\right)^2 (b^3 + a^3) - \frac{H}{ES} \left[l + \frac{1}{3} \left(\frac{q}{H}\right)^2 (b^3 + a^3) \right]$$

5.4.7 Symetrická reťazovka

Na obr.5.32 je znázornená symetrická reťazovka (bez prevýšenia úchytných bodov, t.j. $y_B - y_A = 0$).



Obr.5.32 Symetrická reťazovka

Táto reťazovka je špeciálnym prípadom reťazovky s prevýšením úchytných bodov. Úpravou predtým odvodených vzťahov dostaneme nasledujúce rovnice symetrickej reťazovky:

a) rovnica priehybovej čiary

$$y(x) = \frac{q}{2H} x^2$$

$$h = 0$$

$$y_B = y_A = \frac{ql^2}{8H} = y_{\max}$$

b) osová sila

$$N(x) = H \sqrt{1 + \left(\frac{qx}{H}\right)^2}$$

$$N_A = N_B = H \sqrt{1 + \left(\frac{ql}{2H}\right)^2} = N_{\max}$$

c) pevnostná podmienka

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{S} \leq \sigma_{\text{dov}}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{H}{S}$$

d) deformovaná dĺžka reťazovky

$$s = l + \frac{1}{6} \left(\frac{q}{H}\right)^2 \frac{l^3}{4}$$

e) celkové predĺženie reťazovky

$$\Delta s = \frac{H}{ES} \left[l - \frac{1}{3} \left(\frac{q}{H}\right)^2 \frac{l^3}{4} \right]$$

f) počiatočná dĺžka reťazovky

$$s_0 = s - \Delta s$$

Poznámka:

Pre prípad, že sú splnené predpoklady uvedené v úvode k tejto kapitoly, je potrebné použiť presné vzťahy vedúce na rovnicu vlákna typu kosínusu hyperbolického. Tieto vzťahy možno nájsť v práci: Fecko, Š. - Žiaran, J. - Varga, L.: Elektrické siete, Edičné stredisko SVŠT, Bratislava 1990.

Riešené príklady reťazovky

Príklad č.1 Symetrická reťazovka

Elektrické lano AlFe 240/39 má rozpätie $l = 300\text{m}$. Prierezová plocha vodiča je $S = 281,6\text{mm}^2$, menovitá hmotnosť vodiča je $m = 0,9844\text{ kg/m}$, čomu odpovedá spojitý zaťaženie $q = 9,844\text{ N/m}$. Modul pružnosti lana je $E = 73861\text{ N/mm}^2$, zaručená ťahová sila je $F_p = 76943\text{ N}$ s odpovedajúcou medzou pevnosti $\sigma_p = F_p/S = 273,23\text{ N/mm}^2$. Dovoľené namáhanie v ťahu je $\sigma_{\text{dov}} = 51,79\text{ N/mm}^2$.

Treba určiť:

a) Maximálnu osovú silu od spojitého zaťaženia q : $N_{\max} = ?$

b) Minimálnu osovú silu $N_{\min} = H = ?$

c) Maximálny prieťah lana $y_A = y_B = y_{\max} = ?$

d) Pôvodnú nedeformovanú dĺžku lana s_0

Riešenie

a) Maximálnu osovú silu vypočítame z pevnostnej podmienky:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{dov}}$$

$$\frac{N_{\max}}{S} \leq \sigma_{\text{dov}}$$

$$N_{\max} \leq S \cdot \sigma_{\text{dov}}$$

Po dosadení je hraničná hodnota ťahovej sily $N_{\max} = 281,6 \cdot 51,79 = 14584,064 \text{ N}$.
b) Minimálnu ťahovú silu $N_{\min} = H$ vypočítame zo vzťahu

$$N_{\max} = H \sqrt{1 + \left(\frac{ql}{2H} \right)^2}$$

$$H_{1,2} = \sqrt{N_{\max}^2 - \frac{q^2 l^2}{4}}$$

Riešením je sila $H = 14509,12 \text{ N}$

Z riešenia vyplýva, že ťahová sila sa po dĺžke reťazovky výrazne nemení.

c) Maximálny priebeh reťazovky

$$y_{\max} = y_B = y_A = \frac{ql^2}{8H} = \frac{9,844 \cdot 300^2}{8 \cdot 14509,12} = 7,6327 \text{ m}$$

d) Pôvodná dĺžka lana

$$s_0 = s - \Delta s = l + \frac{l^3}{24} \left(\frac{q}{H} \right)^2 - \frac{H}{ES} \left[l + \frac{l^3}{12} \left(\frac{q}{H} \right)^2 \right] = 300,3078 \text{ m}$$

pričom deformovaná dĺžka vodiča $s = 300,5178 \text{ m}$, a celkové predĺženie $\Delta s = 0,2099 \text{ m}$.

5.5 PRÍKLADY RIEŠENIA ÚLOH ČISTÉHO ŤAHU - TLAKU

a) Staticky určité úlohy namáhania osovou silou

Úlohy tohto typu možno uvedenými metódami riešiť takto:

1. Zostavíme matematický a fyzikálny model riešenej úlohy na prút (tyč) zaťažený osovými silami.
2. Podľa počtu nespojitosti prierezu a zaťaženia prúta si zvolíme príslušný počet úsekov a v nich myslené rezy.
3. Do myslených rezov vložíme výslednicu vnútorných síl $N(x) = \sigma(x) \cdot S(x)$ v kladnom zmysle (von z rezu).
4. Zo statických podmienok rovnováhy odrezanej časti tyče určíme výslednicu vnútorných síl, prípadne napätia $\sigma(x) = \frac{N(x)}{S(x)}$ v príslušných rezoch.
5. Nakreslíme priebeh osových síl $N(x)$ a napätia $\sigma(x)$ po celej dĺžke tyče.
6. Určíme nebezpečný prierez a urobíme pevnostný návrh tyče.
7. Vypočítame celkové predĺženie tyče.

Príklad 1

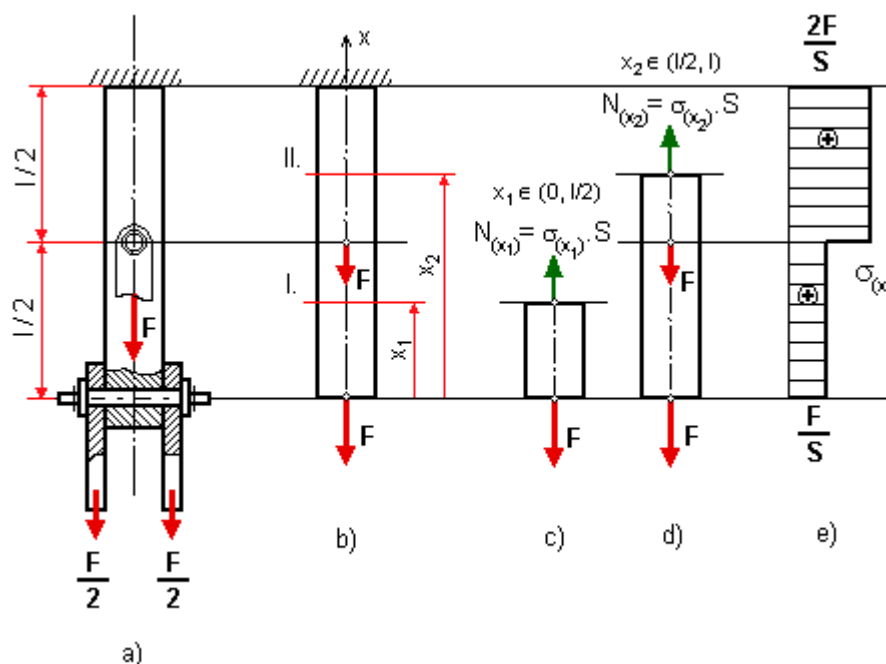
Ťahadlo štvorcového prierezu (obr.5.33a) je namáhané silami F . Určite prierez prúta a jeho celkové predĺženie, keď je dané : $F, l, E, \sigma_K, s, \gamma$.

Riešenie

Model ťahadla je znázornený na obr.5.33b. V ďalšom výpočte zanedbáme oslabenie prierezu ťahadla dierami pre spojovacie kolíky. Vzhľadom na nespojitosť zaťaženia treba zvoliť dva úseky na tyči (I. a II.) a v nich myslené rezy. Bod 3. uvedeného postupu je zrejmý z obr.5.33c, d. Z podmienky rovnováhy síl do smeru osi x pre osové síly v myslených rezoch x_1 a x_2 máme:

$$N(x_1) - F = 0 \rightarrow \sigma(x_1) = \frac{F}{S}$$

$$N(x_2) - F - F = 0 \rightarrow \sigma(x_2) = \frac{2F}{S}$$



Obr.5.33 Výpočet napätia

Priebeh napätia po dĺžke tyče je znázornený na obr.5.33e. Tyč je namáhaná čistým ťahom. Nebezpečný prierez sa nachádza v mieste maximálneho napätia

$$\sigma_{\max} = \frac{2F}{S}$$

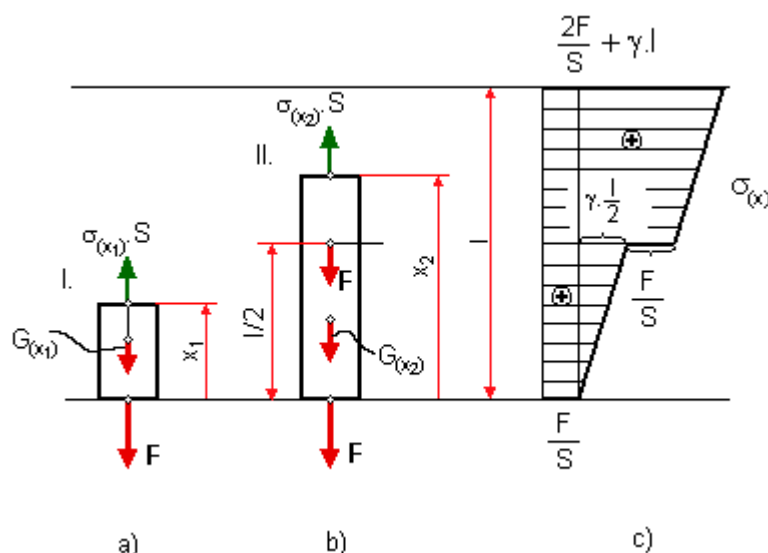
teoreticky v ľubovoľnom reze z intervalu $(l/2, l)$. Pevnostná podmienka je

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{dov}} \\ \frac{2F}{S} \leq \frac{\sigma_K}{s} \Rightarrow S \geq \frac{2F \cdot s}{\sigma_K}$$

Celkové predĺženie tyče bude rovné súčtu predĺžení jej dvoch úsekov

$$\Delta l = \Delta l_I + \Delta l_{II} = \int_0^{l/2} \frac{N(x_1)}{ES} dx_1 + \int_{l/2}^l \frac{N(x_2)}{ES} dx_2 = \frac{3}{2} \frac{Fl}{SE} = \frac{Fl}{2ES} + \frac{Fl}{ES}$$

Z výsledného vzťahu pre Δl vidieť, že celkové predĺženie je dané tiež súčtom predĺžení od jednotlivých zaťažujúcich síl. Ak uvažíme aj vlastnú tiaž, musíme do ťažísk jednotlivých odrezaných častí vložiť objemovú silu, ktorá je úmerná objemu odrezanej časti tyče (obr. 5.28a, b).



Obr.5.34 Zaťaženie vlastnou tiažou

Pre úsek I. a II. máme:

$$x_1 \in (0, l/2)$$

$$x_2 \in (l/2, l)$$

$$\sigma(x_1)S - G(x_1) - F = 0$$

$$\sigma(x_2)S - F - F - G(x_2) = 0$$

$$G(x_1) = V(x_1)\gamma = Sx_1\gamma$$

$$G(x_2) = V(x_2)\gamma = Sx_2\gamma$$

$$\Rightarrow \sigma(x_1) = \frac{F}{S} + \gamma x_1$$

$$\Rightarrow \sigma(x_2) = \frac{2F}{S} + \gamma x_2$$

Napätie $\sigma(x_1)$ a $\sigma(x_2)$ sú dané súčtom napätia od zaťažujúcich síl F a vlastnej tiaže γ . Ich priebeh je na obr. 5.33c. Nebezpečný prierez je v mieste votknutia, kde

$$\sigma_{\max} = \frac{2F}{S} + \gamma l \leq \sigma_{\text{dov}}$$

Prierez tyče

$$S \geq \frac{2F}{\sigma_{\text{dov}} - \gamma l}$$

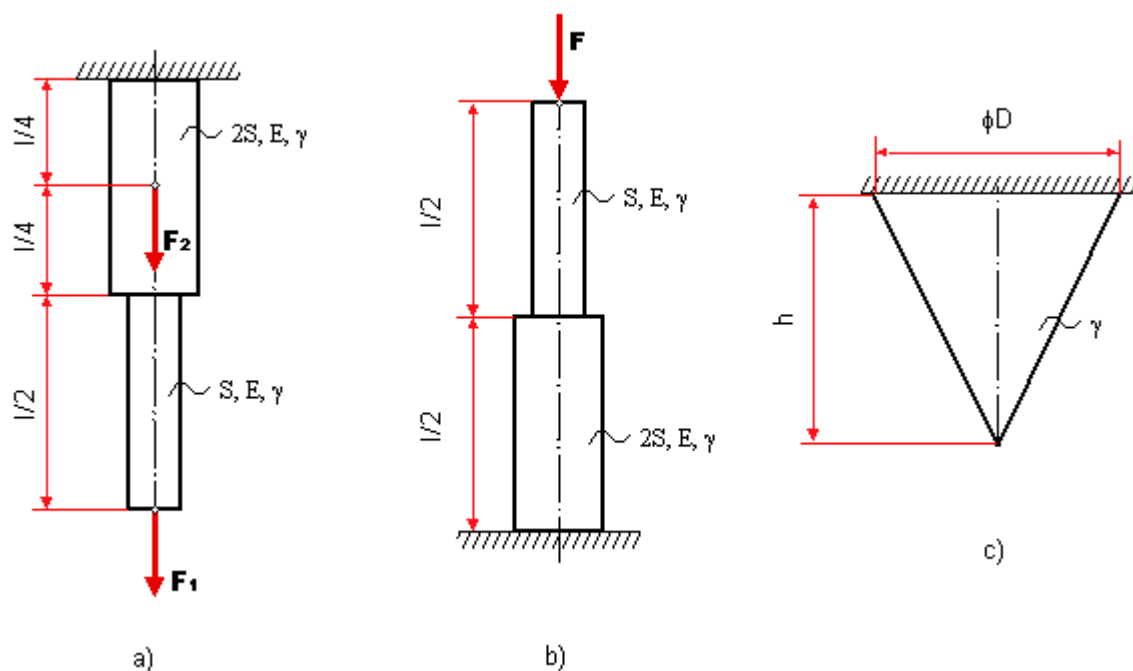
Pre celkové predĺženie tyče platí:

$$\Delta l = \Delta l_I + \Delta l_{II} = \int_0^{l/2} \frac{N(x_1)}{ES} dx_1 + \int_{l/2}^l \frac{N(x_2)}{ES} dx_2 = \int_0^{l/2} \frac{(F + \gamma x_1 S)}{ES} dx_1 + \int_{l/2}^l \frac{(2F + \gamma x_2 S)}{ES} dx_2 = \frac{3Fl}{2ES} + \frac{\gamma l^2}{2E}$$

Z priebehu napätia 5.33e a 5.33c vidieť, že využitie únosnosti prierezu je efektívne len v nebezpečnom priereze. Ostatné prierezy sú využité neekonomicky. Preto treba voliť prierez tyče odstupňovaný, prispôbený veľkosti osových síl v jednotlivých úsekoch.

Príklad 2

Riešte úlohy staticky určitého ťahu (tlaku) podľa obr. 5.35a, b, c. Určite priebeh napätia a celkové predĺženie (skrútenie) tyče. Z pevnostnej podmienky určite veľkosť nebezpečného prierezu. Úlohy riešte všeobecne postupom zhodným, aký bol použitý v príklade 1.



Obr.5.35 Príklady úloh

b) Staticky neurčité úlohy namáhania osovou silou

Ak nemožno osovú silu určiť zo statických podmienok rovnováhy, úloha je staticky neurčitá. V tomto prípade treba rovnice rovnováhy doplniť deformačnými podmienkami.

Postup riešenia

1. Úlohu staticky neurčitú nahradíme úlohou staticky určitou, a to tak, že prebytočnú väzbu odstránime a nahradíme ju staticky neurčitými reakciami.
2. Podľa počtu staticky neurčitých reakcií napíšeme príslušný počet deformačných podmienok (napr. celkové predĺženie alebo skrátenie tyče je nulové) a z nich vypočítame staticky neurčité reakcie.
3. V ďalšom postupujeme ako pri úlohách staticky určitých s tým, že vypočítané staticky neurčité reakcie považujeme za ďalšie vonkajšie zaťaženie.

Riešenie takýchto úloh je uvedené v časti internetovej učebnice "Príklady".

6. Napätosť v bode telesa

Učebný cieľ kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali ovládať:

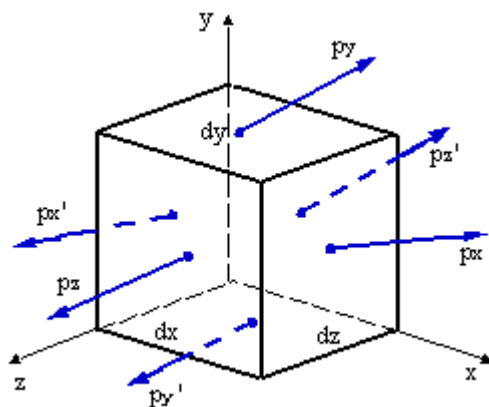
- Definícia napätosti v bode telesa.
- Druhy napätosti v bode telesa.
- Odvodenie vzťahov pre normálové a šmykové napätie v ľubovoľnej rovine prechádzajúcej daným bodom pri jednoosovej napätosti.
- Čo sú to hlavné normálové a hlavné šmykové napätia.
- Čo sú to hlavné roviny napätosti.
- Uviesť príklady jednoosovej napätosti.
- Ako je definovaná rovinná a priestorová napätosť.
- Uviesť príklady rovinatej a priestorovej napätosti.
- Ako je definované pretvorenie v bode telesa.
- Čo sú to hlavné pomerné predĺženia.
- Ako je definovaný invariant pomerného predĺženia.

6.1 POJEM NAPÄTOSTI

Uvažujme hmotné kontinuum zaťažené vonkajšími silami. Zodpovedajúce hmotné body vo vnútri telesa pôsobia vzájomne na seba plošnými silami, ktoré nazývame vektorom napätia. Napätie p v ľubovoľnom bode telesa bude funkciou veľkosti plochy, na ktorej pôsobí vektor napätia, jej orientácie vzhľadom na vzťažný súradnicový systém a od polohy uvažovaného hmotného bodu. Orientácia sledovanej plochy "hmotného bodu" je daná voľbou rezovej roviny. Keďže daným bodom možno preložiť nekonečný počet rezových rovín, v danom bode máme nekonečný počet výsledníc vnútorných síl. *Napätosť v bode telesa* je mechanický stav, daný súhrnom napätí v jednotlivých rezových rovinách, ktoré možno daným bodom preložiť. Vzhľadom na tenzorové vlastnosti napätia je napätosť v bode dokonale určená, ak poznáme napätia, pôsobiace v rovinách elementárneho hranolčeka (fyz. model hmotného bodu). Napätosť vo všeobecnosti delíme na:

1. priestorovú (trojosovú),
2. rovinnú (dvojosovú),
3. priamkovú (jednoosovú).

Na určenie druhu napätosti v bode telesa, spôsobenom vonkajšími silami, uvažujme elementárny hranol dx, dy, dz (obr. 6.1). Účinok odstránených častí nahradíme vnútornými silami.

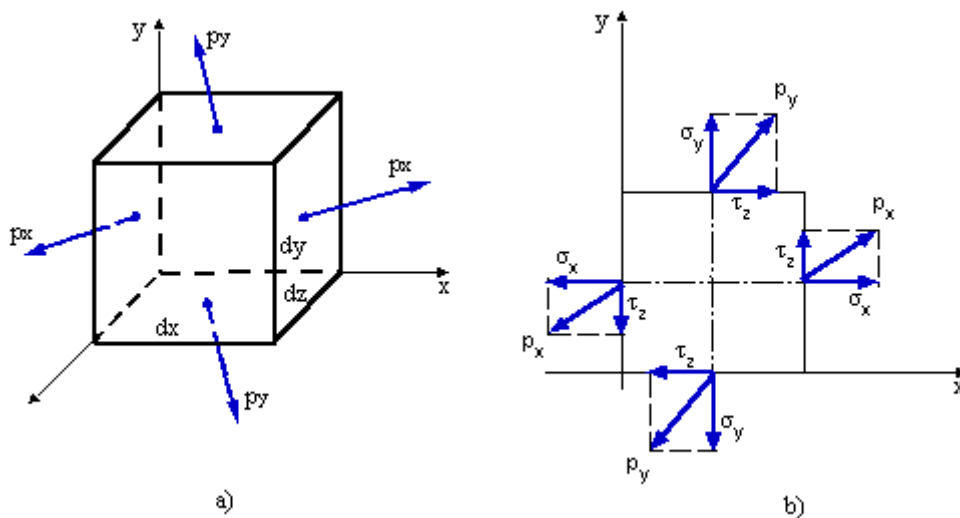


Obr.6.1 Napätosť v bode telesa

Napätie môže byť vo všeobecnosti rozložené po priereze nerovnomerne, no na stenách elementárneho hranola toto rozloženie môžeme pokladať za rovnomerné. Vnútorne sily pripadajúce na jednotku plochy, teda vektory napätia, prechádzajú ťažiskami príslušných plôch.

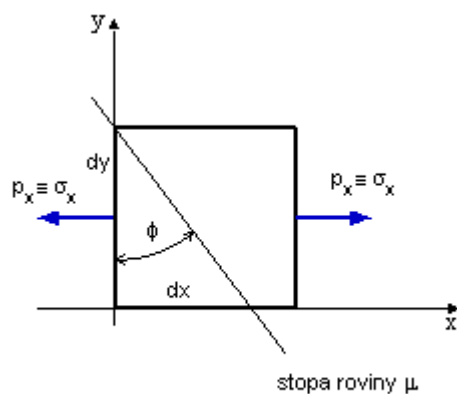
Z podmienok rovnováhy hranola je zrejmé, že $p_x = p'_x, p_y = p'_y, p_z = p'_z$.

Ak sú všetky napätia nenulové, ide o *priestorovú napätosť*. Ak nájdeme polohu elementárneho hranola v telese tak, že v dvoch protiľahlých stenách budú napätia (napr. p_z) rovné nule (obr. 6.2) a v ostatných stenách sú napätia nenulové, ide o *napätosť rovinnú*.

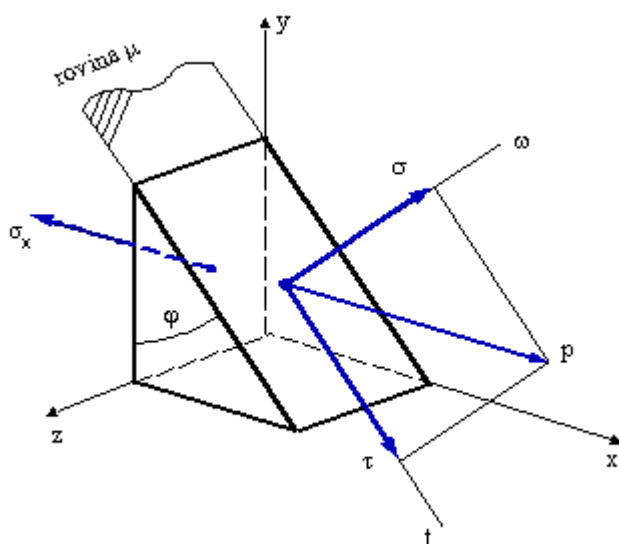


Obr.6.2 Rovinná napätosť

Ak môžeme dať elementárnemu hranolu v telese takú polohu, aby napr. p_y a p_z boli rovné nule (obr. 6.3), musí byť $p_x = \sigma_x$, potom hovoríme o *priamkovej napätosti*.



Obr.6.3 Jednoosová napätosť

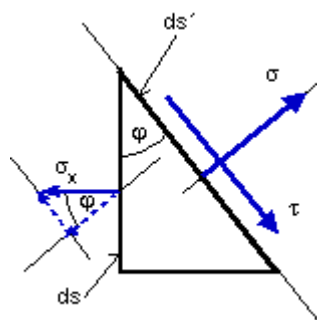


Obr.6.4 Určenie σ a τ v rovine μ

Z uvedeného vyplýva, že rovinná a priamková napätosť sú špeciálne prípady priestorovej napätosti. Ďalej si ukážeme, že ak poznáme napätia v rovinách elementárneho hranola, potom možno z nich určiť napätia v ľubovoľnej inej rovine, prechádzajúcej daným bodom.

6.2 PRIAMKOVÁ JEDNOOSOVÁ NAPÄTOSŤ

Úlohou bude z napätia σ_x určiť napätia v ľubovoľnej rovine μ , ktorá prechádza daným bodom. To nám potom umožní klasifikovať napätosť v danom bode a určiť roviny, v ktorých sú napätia extrémálne. Elementárny hranol rozrežeme rovinnou μ (obr.6.3 a 6.4). Z podmienok rovnováhy vnútorných síl elementu (obr.6.5) do smeru normálových a šmykových napätí dostaneme:



Obr.6.5 Rovnováha vnútorných síl

$$\sum F_x = 0: \quad \sigma \cdot dS' - \sigma_x \cos \varphi \cdot dS = 0$$

$$\sum F_t = 0: \quad \tau \cdot dS' - \sigma_x \sin \varphi \cdot dS = 0$$

Pretože $dS' = \frac{dS}{\cos \varphi}$, napätia v rovine μ budú: $\sigma = \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi$ a $\tau = \sigma_x \cdot \sin \varphi \cos \varphi$
Ak použijeme vzťahy:

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2}$$

$$\sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}$$

potom

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cdot \cos 2\varphi$$

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2} \cdot \sin 2\varphi$$

Keďže v týchto rovniciach nevystupuje plocha dS a ani žiadna materiálová konštanta, napätie σ a τ závisí len od σ_x a uhla φ . Hľadáním extrému pre napätie σ zistíme, že normálové napätie je najväčšie v rovine kolmej na σ_x ($\varphi = 0$):

$$[\sigma]_{\varphi=0} = \sigma_{\max} = \sigma_x$$

a minimálne v rovine na ňu kolmej ($\varphi = 90^\circ$):

$$[\sigma]_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \sigma_{\min} = 0$$

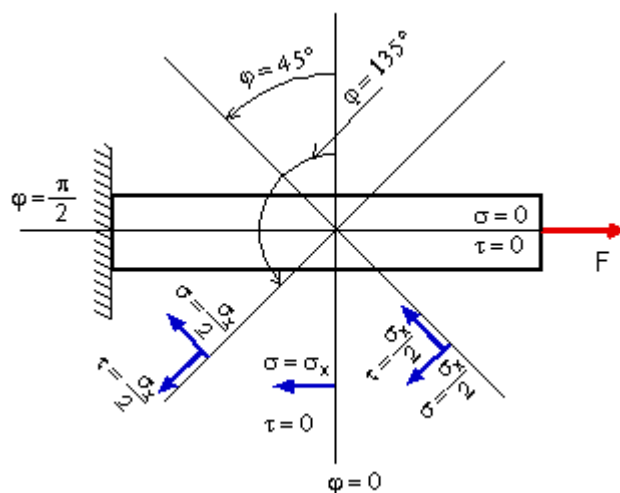
V týchto rovinách je šmykové napätie rovné 0. Naproti tomu šmykové napätie je maximálne v rovinách určených uhlami $\varphi = 45^\circ$, resp. $\varphi = 135^\circ$

$$[\tau]_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = \tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2}$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{4}$$

pričom normálové napätie tam nie je nulové. Znázornenie priamkovej napätosti pri čistom ťahu (tlaku) je znázornené na obr. 6.6. Z veľkosti napätia v jednotlivých rovinách je zrejmá voľba rezovej roviny (kolmá na osovú silu) pri namáhaní osovými silami. V tejto rovine je napätie maximálne, a keď nemá nastať porušenie tyče, potom

$$\sigma_{\max} = \sigma_x \leq \sigma_{\text{doz}}$$



Obr.6.6 Napätie σ a τ vo vybratých rovinách

6.3 MOHROVA KRUŽNICA JEDNOOSOVEJ NAPÄTOSTI

Priebeh napätia σ a τ v rezových rovinách v závislosti od uhla φ možno znázorniť graficky, keď rovnice prepíšeme na tvar

$$\sigma - \frac{\sigma_x}{2} = \frac{\sigma_x}{2} \cdot \cos 2\varphi$$

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2} \cdot \sin 2\varphi$$

Po umocnení a sčítaní týchto rovníc dostaneme:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2} \right)^2$$

Ak vo zvolenom súradnicovom systéme vynášame na os x napätia σ a na os y napätia τ , potom výsledná rovnica je rovnicou kružnice

$$(x - m)^2 + y^2 = R^2$$

ktorej stred leží na osi σ vo vzdialenosti $m = \frac{\sigma_x}{2}$ od počiatku súradnicového systému, má

polomer $R = \frac{\sigma_x}{2}$. Túto kružnicu nazývame Mohrovou kružnicou napätia (obr. 6.7). Medzi elementárnym hranolčekom a Mohrovou kružnicou platí táto závislosť:

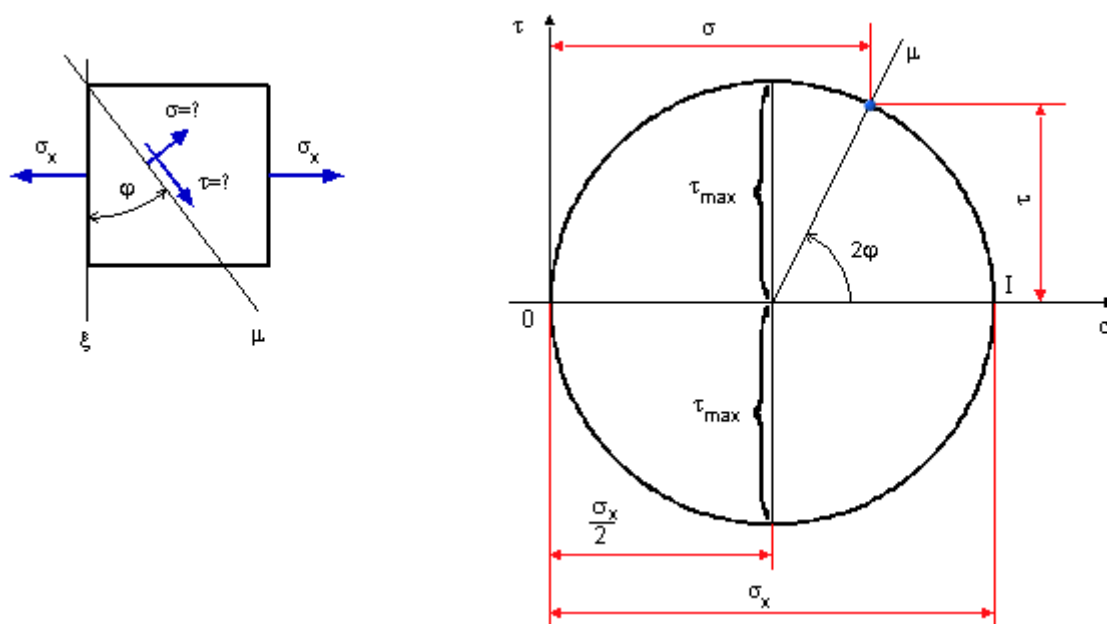
Každej rezovej rovine elementárneho hranola zodpovedá na Mohrovej kružnici jednojednoznačne jeden bod, ktorého súradnice sú hodnotami napätia σ a τ v príslušnej rovine.

Postup grafického riešenia napätia σ a τ v ľubovoľnej rovine μ je takýto:

1. Pre dané σ_x zostrojíme Mohrovu kružnicu (obr. 6.7).
2. Od bodu na kružnici, ktorý zodpovedá rezu ξ v elementárnom hranole, nanesieme stredový uhol 2φ v rovnakom zmysle, ako v elementárnom hranole (vždy od ξ ku μ).

3. Sprievodič stredového uhla 2φ vytína na Mohrovej kružnici bod μ , ktorého súradnice určujú v príslušnej mierke veľkosť napätí σ a τ_0

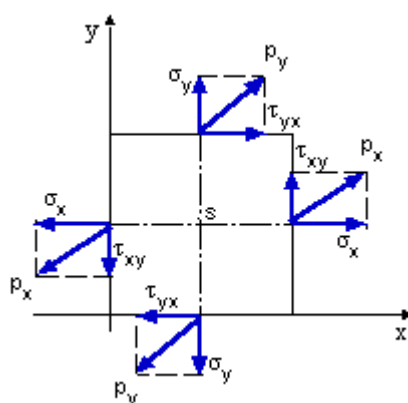
Mohrova kružnica čistého ťahu (obr. 6.6) je znázornená na obr. 6.7.



Obr.6.7 Mohrova kružnica jednoosovej napätosti

6.4 ROVINNÁ (DVOJOSOVÁ) NAPÄTOSŤ

Uvažujme rovinnú napätosť zadanú napätiami p_x a p_y ($p_z = 0$) podľa obr.6.8.



Obr.6.8 Rovinná napätosť

Tieto napätia rozložíme do smerov súradnicových osí. Dostaneme tak normálové napätia σ_x a σ_y a šmykové napätia τ_{xy} , τ_{yx} . Prvý index šmykového napätia, napr. τ_{xy} , značí, že pôsobí na ploške kolmej na os x . Druhý index označuje smer pôsobenia napätia. Z momentovej podmienky rovnováhy vnútorných síl k bodu s dostaneme:

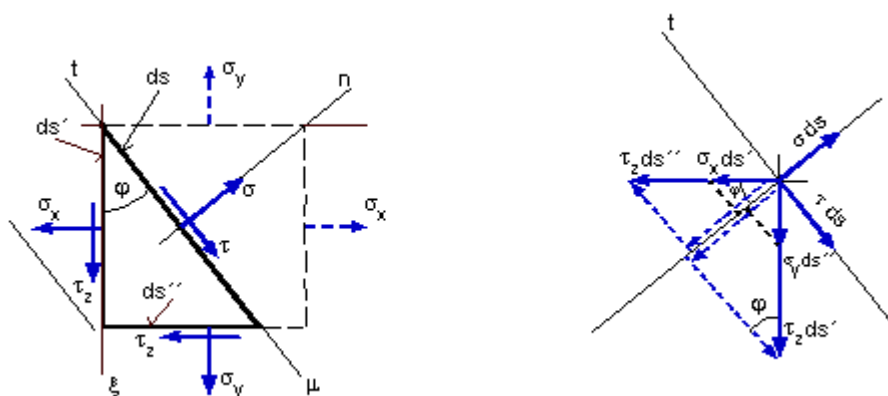
$$\sum M_s = 0: \tau_{yx} dx dz \cdot \frac{dy}{2} + \tau_{yx} dx dz \cdot \frac{dy}{2} - \tau_{xy} dy dz \cdot \frac{dx}{2} - \tau_{xy} dy dz \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

a po úprave

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_x$$

Pretože elementárny hranol je vlastne bodom telesa, možno všeobecne povedať, že v určitom bode telesa sú v rezoch vzájomne kolmých šmykové napätia rovnaké a smerujú buď k priesečnici, alebo od nej a nazývame ich *združenými šmykovými napätiami*. Označujeme ich potom podľa toho, ku ktorej osi (priesečnici) smerujú. V našom prípade to je os z . Podobne to platí aj pre šmykové napätia v ostatných rovinách elementárneho hranola, napr. $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_y$ a pod.

Napätia v myslenom reze μ určíme z podmienok rovnováhy odrezanej časti hranola (obr. 6.9):



Obr.6.9 Určenie σ a τ

$$\sum F_x = 0: \sigma \cdot dS - (\tau_x dS'' + \sigma_x dS') \cdot \cos \varphi - (\tau_x dS' + \sigma_y dS'') \cdot \sin \varphi = 0$$

$$\sum F_t = 0: \sigma \cdot dS - (\sigma_y dS'' + \tau_x dS') \cdot \sin \varphi - (\sigma_x dS' + \tau_x dS'') \cdot \cos \varphi = 0$$

Ako však vidieť z obr. 6.9, platí: $dS' = dS \cdot \cos \varphi$ a $dS'' = dS \cdot \sin \varphi$

Dosadením týchto vzťahov do predchádzajúcich rovníc dostaneme:

$$\sigma = \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi + \sigma_y \cdot \sin^2 \varphi + 2\tau_x \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

$$\tau = \sigma_x \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \sigma_y \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \tau_x \cdot \sin^2 \varphi - \tau_x \cdot \cos^2 \varphi$$

Tieto rovnice možno ďalej upraviť použitím vzťahov:

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

$$2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \sin 2\varphi$$

a ďalšej úprave do tvaru

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi + \tau_x \cdot \sin 2\varphi$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi - \tau_x \cdot \cos 2\varphi$$

Z poslednej rovnice vidieť, že napätia σ a τ v reze μ , ktorý je odklonený od rezu ξ o uhol φ , sú nezávislé od dS a materiálových konštánt. Podobne ako pri priamkovej napätosti možno

určiť rezy I. a II., v ktorých normálové napätie nadobúda extrémne hodnoty. Hľadaním extrému funkcie $\sigma = \sigma(\varphi)$ nájdeme maximálne (σ_1) a minimálne (σ_2) normálové napätie v tvare

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2}$$

Roviny I. a II. nazývame *hlavnými rovinami* a napätia σ_1 a σ_2 v nich pôsobiace *hlavnými napätiami*. Ďalej by sme zistili, že v hlavných rovinách sú šmykové napätia nulové a hlavné roviny napätosti sú navzájom kolmé.

Podobným postupom pre maximálne šmykové napätia dostaneme:

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2}$$

Extrémne šmykové napätia, pôsobiace v dvoch vzájomne na seba kolmých rovinách, sa od seba líšia len znamienkami (čo znovu len potvrdzuje zákon združených šmykových napätí). V rezoch, kde pôsobia extrémne šmykové napätia, súčasne pôsobia i normálové napätia. Ak urobíme súčet hlavných napätí definovaných rovnicou pre maximálne a minimálne normálové napätie, dostaneme:

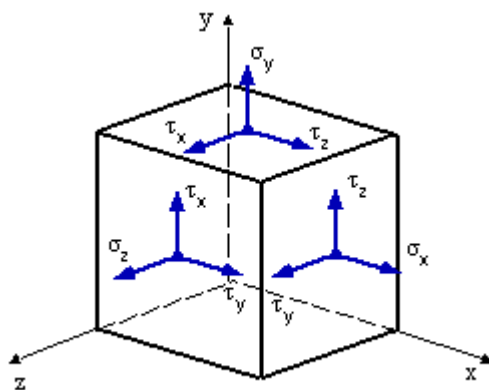
$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = \text{const}$$

To znamená, že súčet normálových napätí v dvoch ľubovoľných na seba kolmých rovinách v tom istom bode telesa je konštantný a je rovný súčtu hlavných napätí. Tento súčet je invariantný voči voľbe vzťažného súradnicového systému v danom bode.

Preto túto rovnicu nazývame 1. invariantom napätí. Pre rovinnú napätosť možno obdobným spôsobom ako pri jednoosovej napätosti zostrojiť Mohrovú kružnicu. Táto kružnica je grafickým znázornením rovinatej napätosti v bode telesa.

6.5 PRIESTOROVÁ NAPÄTOSŤ

Vo všetkých troch rovinách EH pôsobia nenulové napätia. Priestorová napätosť je zadaná tromi normálovými napätiami σ_x , σ_y , σ_z a tromi združenými šmykovými napätiami τ_x , τ_y a τ_z (obr. 6.10), z ktorých možno určiť vektor napätia v ľubovoľnej rovine EH.



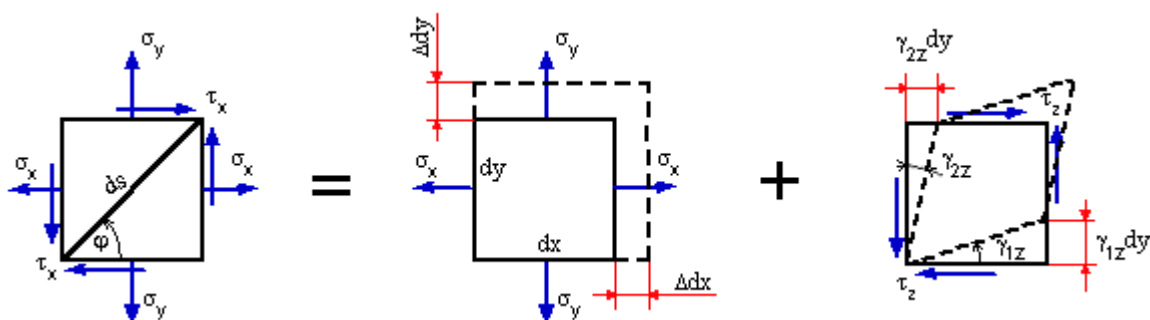
Obr.6.10 Priestorová napätosť

Zo zložiek tenzora napätia možno určiť tri hlavné normálové napätia (ako hlavné hodnoty tenzora napätia) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, ktoré pôsobia v troch navzájom na seba kolmých - hlavných rovinách I, II, III.

Pomerne zložitým postupom možno zostrojiť aj MK. Podrobnejšiu analýzu priestorovej napätosti však neuvádzame a pri potrebe riešiť takúto napätosť odporúčame použiť literatúru uvedenú v závere skripta. Treba však uviesť, že rovinná a priamková napätosť sú špeciálne prípady priestorovej napätosti.

6.6 PRETVORENIE V BODE TELESA

Analýzou pretvorenia telesa nazývame skúmanie zmeny vzdialenosti dvoch vybraných hmotných bodov telesa. Pretvorením v bode telesa budeme rozumieť deformáciu elementárneho hranolčeka. Ak elementárny hranol (obr. 6.11) je zaťažovaný rovinnou napätosťou, môžeme na základe zákona superpozície účinkov jeho deformáciu rozdeliť na pretvorenia od normálových napätí σ_x, σ_y a zmenu pravého uhla EH od šmykových napätí τ_x .



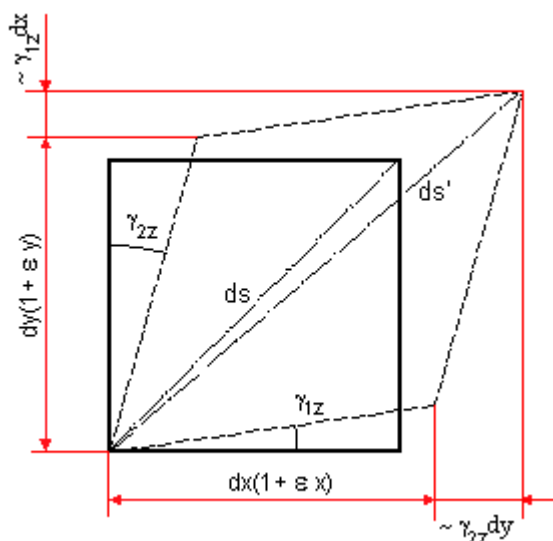
Obr.6.11 Rovinná deformácia

Predĺženie strán hranola od normálových napätí bude

$$\Delta dx = \varepsilon_x dx$$

$$\Delta dy = \varepsilon_y dy$$

Výsledné pretvorenia EH je na obr. 6.12.



Obr.6.12 Zložky pretvorenia

Uhlopriečka EH - ds sa zmení na ds'

$$ds' = ds + \Delta ds = (1 + \varepsilon) ds$$

resp. podľa obr. 6.12

$$ds' = \sqrt{\left[(1 + \varepsilon_x) dx + \gamma_{1x} dy\right]^2 + \left[(1 + \varepsilon_y) dy + \gamma_{2x} dx\right]^2}$$

Ak potom celú rovnicu umocníme a vykrátíme ds a podľa obr. 6.11 dosadíme za

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \varphi$$

dostaneme

$$(1 + \varepsilon)^2 = \left[(1 + \varepsilon_x) dx + \gamma_{1x} \sin \varphi\right]^2 + \left[(1 + \varepsilon_y) dy + \gamma_{2x} \cos \varphi\right]^2$$

Vykonaním vyznačených operácií a prijatím predpokladov, že pomerné predĺženie ε , ε_x , ε_y a uhlové pretvorenia γ_{1x} , γ_{2x} sú oproti jednotke veľmi malé, možno ich štvorce a súčiny ako veličiny malé, vyšších rádov, zanedbať a tak po úprave bude

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_y \sin^2 \varphi + (\gamma_{1x} + \gamma_{2x}) \sin \varphi \cos \varphi$$

Ak ešte označíme celkovú zmenu pravého uhla $\gamma = \gamma_{1x} + \gamma_{2x}$ a použijeme tiež vzťahy

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\varphi + \frac{\gamma_x}{2} \cdot \sin 2\varphi$$

dostaneme po úprave vzťah pre pomerné predĺženie uhlopriečky

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\varphi + \frac{\gamma_x}{2} \cdot \sin 2\varphi$$

Tento výraz je analogický s prvou rovnicou na určenie σ z daných σ_x , σ_y a τ_x v rovinnej napätosti. V obidvoch rovniciach si navzájom zodpovedajú:

$$\sigma \sim \varepsilon \quad \tau \sim \frac{\gamma}{2}$$

$$\sigma_x \sim \varepsilon_x \quad \tau_x \sim \frac{\gamma_x}{2}$$

$$\sigma_y \sim \varepsilon_y$$

Použitím tejto analógie možno potom použiť všetky výsledné vzorce pre rovinnú napätosť, ak príslušné napätia nahradíme pomerným predĺžením a uhlovým pretvorením. Pre hlavné pomerné predĺženia a uhlové pretvorenia budú platiť vzťahy:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{\gamma_x}{2}\right)^2}$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \sin 2\varphi - \frac{\gamma_x}{2} \cdot \cos 2\varphi$$

Podobne bude platiť invariant pomerných predĺžení

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \text{const}$$

ako aj fakt, že možno nakresliť Mohrovu kružnicu deformácie v bode telesa.

Keďže vo všetkých tu odvodených vzťahoch sa nevyskytuje žiadna materiálová konštanta, platia tieto rovnice pre všetky materiály, a to pre deformácie elastické i plastické, a to tým presnejšie, čím sú deformácie menšie.

7. Zovšeobecnený Hookov zákon

Učebný cieľ kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali ovládať:

- Definíciu a matematické vyjadrenie Hookovho zákona jednoosovej a rovinnej napätosti.
- Obsah Hookovho zákona priestorovej napätosti.
- Ako možno určiť pomernú zmenu objemu.
- Vyjadrenie energie napätosti.
- Vyjadrenie závislosti medzi modulom pružnosti v ťahu (tlaku), šmyku a Poissonovou konštantou.

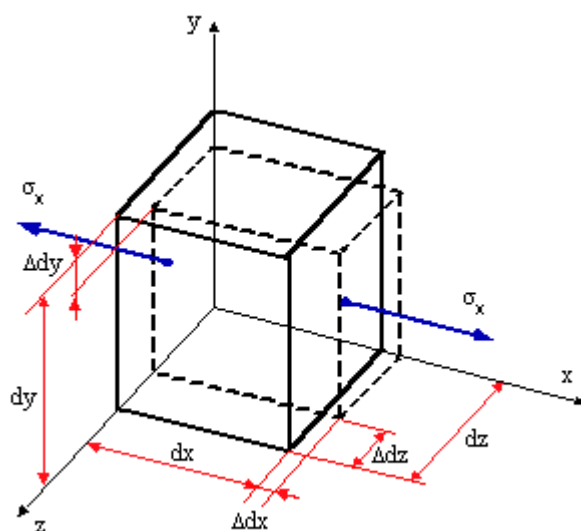
Vzájomnú závislosť medzi napätím σ a pomerným predĺžením ε tyče nám vyjadruje Hookov zákon v tvare

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

kde E sme nazvali modulom pružnosti materiálu v ťahu. Platnosť Hookovho zákona sa zovšeobecňuje aj pre rovinnú a priestorovú napätosť.

7.1 HOOKOV ZÁKON PRI JEDNOOSOVEJ NAPÄTOSTI

Treba určiť pretvorenie elementárneho hranola, na ktorý pôsobí len napätie σ_x (obr.7.1).



Obr.7.1 Pretvorenie hranola

Pre smer osi x možno napísať Hookov zákon:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\Delta dx}{dx}$$

Okrem predĺženia ε_x sa hranol priečne zúži o rovnaké pomerné hodnoty (vyplýva to z pozorovania deformácie ťahanej tyče)

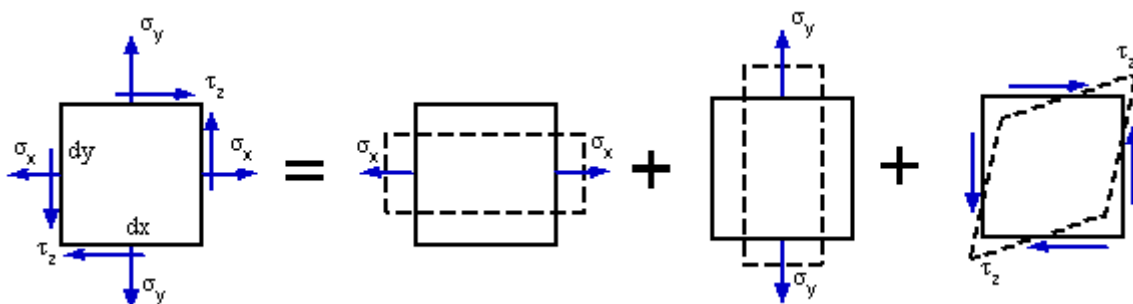
$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma_x}{m \cdot E}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma_x}{m \cdot E}$$

Z toho vyplýva, že aj priamková napätosť vyvoláva priestorové pretvorenie.

7.2 HOOKOV ZÁKON PRI ROVINNEJ NAPÄTOSTI

Rovinná napätosť je určená napätiami σ_x , σ_y , τ_z . Na základe zákona o superpozícii účinkov budeme vyšetrovať pretvorenie hranola postupne od jednotlivých zložiek napätia (obr. 7.2).



Obr.7.2 Superpozícia účinkov

Vyjdeme z predpokladu, že normálové napätia spôsobia pomerné predĺženie hrán a šmykové napätie spôsobí zmenu pravých uhlov (pomerné skosenie) elementárneho hranola.

Pretvorenie od σ_x :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\sigma_x}{m \cdot E}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\sigma_x}{m \cdot E}$$

Pretvorenie od σ_y :

$$\varepsilon_x = -\frac{\sigma_y}{m \cdot E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\sigma_y}{m \cdot E}$$

Celkové pomerné predĺženie bude:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x + \varepsilon_x = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} \right)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y' + \varepsilon_y'' = \frac{1}{E} \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{m} \right)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z' + \varepsilon_z'' = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{m \cdot E}$$

Pomerné skosenie od τ_z je dané Hookovým zákonom v šmyku

$$\gamma_z = \frac{\tau_z}{G}$$

Posledné dve rovnice nazývame rovnicami *elasticity*. Podobne ako pri jednoosovej napätosti, aj pri priamkovej napätosti je pretvorenie priestorové. V špeciálnom prípade, ak ε_z je veľmi malé, možno ho v praktických úlohách zanedbať, a vtedy hovoríme o *rovinnej deformácii*. Z týchto rovníc možno stanoviť inverznú závislosť

$$\sigma_x = \frac{m^2 \cdot E}{m^2 - 1} \left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_y}{m} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{m^2 \cdot E}{m^2 - 1} \left(\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x}{m} \right)$$

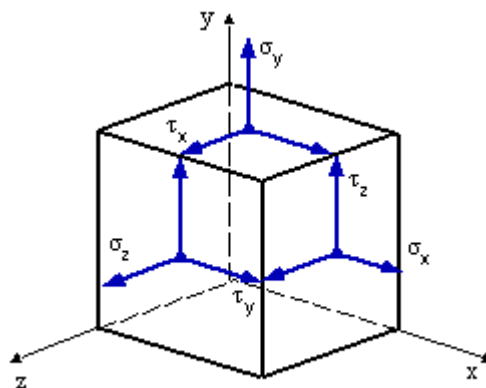
$$\tau_z = G \cdot \gamma_z$$

ktorú nazývame zovšeobecneným Hookovým zákonom rovinnej napätosti. Ľahko možno ukázať, že v maticovom zápise bude mať tvar

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m^2 \cdot E}{m^2 - 1} & \frac{m \cdot E}{m^2 - 1} & 0 \\ \frac{m \cdot E}{m^2 - 1} & \frac{m^2 \cdot E}{m^2 - 1} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_z \end{bmatrix}$$

7.3 HOOKOV ZÁKON PRI PRIESTOROVEJ NAPÄTOSTI

Postupným určením pretvorenia hranola od napätí σ_x , σ_y , σ_z , τ_x , τ_y , τ_z (obr.7.3) a sčítaním jeho zložiek (podobne ako pri rovinnej napätosti) dostaneme:



Obr.7.3 Priestorová napätosť

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right)$$

$$\gamma_x = \frac{\tau_x}{G}$$

$$\gamma_y = \frac{\tau_y}{G}$$

$$\gamma_z = \frac{\tau_z}{G}$$

Tieto rovnice predstavujú rovnice elasticky priestorovej napätosti. Inverzné vzťahy k nim značia zovšeobecnený Hookov zákon priestorovej napätosti:

$$\sigma_x = \frac{m \cdot E}{m+1} \left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{m-2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{m \cdot E}{m+1} \left(\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{m-2} \right)$$

$$\sigma_z = \frac{m \cdot E}{m+1} \left(\varepsilon_z + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{m-2} \right)$$

$$\tau_x = G \gamma_x$$

$$\tau_y = G \gamma_y$$

$$\tau_z = G \gamma_z$$

Úpravou týchto rovníc možno maticový tvar Hookovho zákona (obvykle sa používa

Poissonova konštanta $\nu = \frac{1}{m}$)

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{1}{1-2\nu} & \frac{1}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{1}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1-2\nu} & \frac{1}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix}$$

7.4 POMERNÁ ZMENA OBJEMU

Uvažujeme elementárny hranol s dĺžkou strán dx , dy a dz . Pretvorenie elementárneho hranola je vo všeobecnosti dané pomernými predĺženiami ε_x , ε_y , ε_z a pomernými skoseniami γ_x , γ_y a γ_z . Pôvodný objem hranola bol

$$dV' = dx dy dz$$

Ak zanedbáme vplyv zmeny pravých uhlov hranola na zmenu dĺžok jeho hrán, bude zmena objemu spôsobená predĺžením hrán hranola od pomerných predĺžení

$$dV' = (dx + \Delta dx)(dy + \Delta dy)(dz + \Delta dz) = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) dx dy dz$$

Po roznásobení výrazov v zátvorkách a zanedbaním mocnín veličín malého rádu dostaneme:

$$dV' = dx dy dz (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = dV + dV(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

z toho zmena objemu

$$\Delta dV = dV' - dV = dV(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

a pomerná zmena objemu

$$\Theta = \frac{\Delta dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

t.j. je rovná súčtu pomerných predĺžení strán hranola. Ak dosadíme do pomernej zmeny objemu rovnice elasticity, dostaneme:

$$\Theta = \frac{m-2}{m} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Poznámka: V prípade všestranného ťahu alebo tlaku bude

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$$

čo znamená, že

$$\Theta = \frac{m-2}{mE} \cdot 3p$$

Pre nestlačiteľné telesá je pomerná zmena objemu $\Theta = 0$. Potom musí platiť $m - 2 = 0$ a v tom prípade $m = 2$ ($\nu = 0,5$).

Z hľadiska fyzikálneho významu pre rovnice pomernej zmeny objemu musí platiť:

$$m - 2 \geq 0 \Rightarrow m \geq 2$$

$$(\nu \leq 0,5)$$

V opačnom prípade, t. j. pre $m \geq 2$ ($\nu \leq 0,5$), by bola, ako to vyplýva z hore uvedených rovníc, pri všestrannom ťahu pomerná zmena objemu Θ záporná, čo zrejme, odporuje skutočnosti.

7.5 ENERGIA NAPÄTOSTI PRI PRIESTOROVEJ NAPÄTOSTI

Celková energia napätosti bude daná súčtom energií napätosti od jednotlivých napätí σ_x , σ_y , σ_z , τ_x , τ_y , τ_z

$$A = A_{\sigma_x} + A_{\sigma_y} + \dots + A_{\tau_z}$$

Využitím vzťahov zo 6.kapitoly potom platí:

$$A = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV + \dots + \frac{1}{2} \int_V \tau_z \gamma_z$$

Merná energia napätosti (ne jednotku objemu) bude

$$A_1 = \frac{dA}{dV} = \frac{1}{2} (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \dots + \tau_{xz} \gamma_{xz})$$

Ak použijeme rovnice elasticity, dostaneme:

$$A_1 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{2}{m} (\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_z) + \frac{\tau_{xz}^2}{G}$$

Ak je rovinná napätosť zadaná hlavnými napätiami σ_1, σ_2 a $\sigma_3 (\tau = 0)$, posledná rovnica prejde do tvaru

$$A_1 = \frac{1}{2A} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m} (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3) \right]$$

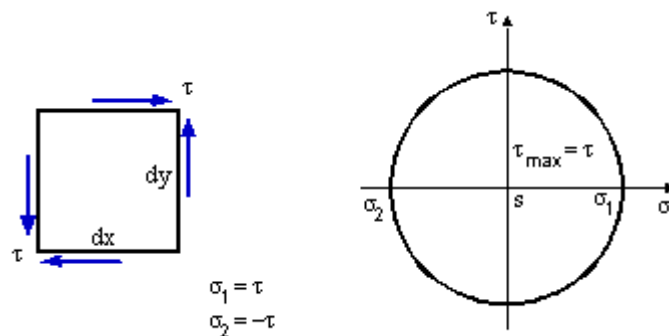
V prípade rovinatej napätosti treba do posledných dvoch vzťahov dosadiť $\sigma_z = \tau_x = \tau_y = 0$, resp. $\sigma_3 = 0$.

V prípade jednoosovej napätosti je len σ_x rôzne od nuly, resp. σ_1 je rôzne od nuly.

7.6 VZÁJOMNÁ ZÁVISLOSŤ MEDZI E, G A m

Medzi modulom pružnosti v ťahu - tlaku E , modulom pružnosti v šmyku G a Poissonovou konštantou m existuje závislosť, ktorú môžeme ľahko odvodiť.

Uvažujme pritom elementárny hranol zaťažný samotnými šmykovými napätiami (obr. 7.4a) ako špeciálny prípad rovinatej napätosti.



Obr.7.4 Čistý šmyk

Merná energia napätosti prostého šmyku podľa rovnice je

$$A_{1\tau} = \frac{1}{2} \tau \cdot \gamma = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G}$$

Mernú energiu napätosti prostého šmyku možno však vyjadriť aj ako

$$A_{1\sigma} = \frac{1}{2E} \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \frac{2}{m} \sigma_1 \cdot \sigma_2 \right)$$

kde podľa Mohrovej kružnice napätí (obr.7.4) je $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = -\tau$, a ak za tieto hodnoty dosadíme do poslednej rovnice, dostaneme:

$$A_1 = \frac{1}{2E} \left(\tau^2 + \tau^2 + \frac{2}{m} \tau^2 \right) = \frac{m+1}{mE} \cdot \tau^2$$

Rovnice pre $A_{1\tau}$ a A_1 v tomto prípade vyjadrujú mernú energiu napätosti toho istého prípadu, a teda musí byť

$$A_{1\tau} = A_1$$

t.j.

$$\frac{\tau^2}{2G} = \frac{m+1}{mE} \tau^2$$

a z toho modul pružnosti v šmyku bude

$$G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

8. Hypotézy porušenia materiálu

Učebný cieľ kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali ovládať:

- Princíp a význam hypotéz pevnosti.
- Základné hypotézy pevnosti, ich fyzikálne a matematické vyjadrenie.
- Praktické použitie hypotéz pevnosti pre danú napätosť a typ materiálu.

Väčšina údajov o pevnosti materiálov sa získala laboratórnymi skúškami namáhaním ťahom alebo tlakom. Prirodzene, že aj dimenzovanie súčiastky namáhanej prostým ťahom bude podľa toho úloha veľmi jednoduchá. Treba splniť len podmienku, aby najväčšie napätie

neprekročilo hodnotu dovoleného namáhania σ_{dov} , ktoré pri väčšine húževnatých materiálov má pre ťah i tlak rovnaké hodnoty. Krehké materiály majú tieto hodnoty rozdielne.

Už v predošlých kapitolách bolo spomenuté, že dovolené namáhanie sa určuje tak, aby bola zaručená istá miera bezpečnosti oproti vzniku nebezpečného stavu (nebezpečným stavom rozumieme porušenie alebo veľkú trvalú deformáciu). Pri priamkovej napätosti (kde $\sigma_2 = 0$ a $\sigma_3 = 0$) možno všetky medzné podmienky pre posúdenie nebezpečenstva poruchy určiť z laboratórnych skúšok v ťahu alebo tlaku.

Pri rovinnej alebo priestorovej napätosti, kde ani jedno z hlavných napätí nie je rovné nule, môže byť začiatok nebezpečného stavu (t.j. stavu, kde dochádza k poruche alebo k veľkým trvalým deformáciám) spôsobený všeobecne rôznymi číselnými hodnotami σ_1 , σ_2 , σ_3 . Každéj kombinácii týchto napätí budú prislúchať určité nebezpečné hodnoty hlavných napätí, pri ktorých nastáva nebezpečný stav materiálu.

Na určenie týchto nebezpečných napätí σ_1 , σ_2 , σ_3 by bolo treba namáhať vzorky materiálov v laboratóriách pri rôznych vzájomných pomeroch hodnôt týchto napätí. Prakticky takéto pokusy uskutočniť ani nemožno vzhľadom na prevádzkové ťažkosti, ale najmä pre veľké množstvo skúšok.

Treba preto nájsť spôsob, ako zostaviť pri zloženej napätosti podmienky pevnosti podľa hodnôt medze klzu σ_K a medze pevnosti σ_R získaných zo skúšok pri priamkovej napätosti. Nebezpečný stav, či už pri húževnatých materiáloch (okamih vzniku veľkých trvalých deformácií) alebo pri krehkých materiáloch (okamih vzniku trhlin) pri rovinnej a priestorovej napätosti, budeme posudzovať pomocou tzv. *porovnávacieho napätia* σ_s , ktoré samotné by vyvolalo rovnaký nebezpečný stav ako skutočná rovinná alebo priestorová napätosť. Pri dimenzovaní sa spravidla kladie požiadavka, aby porovnávacie napätie bolo menšie ako dovolené namáhanie, teda

$$\sigma_s \leq \sigma_{dov}$$

Veľkosť porovnávacieho napätia je definovaná rôzne podľa jednotlivých hypotéz.

I. Hypotéza najväčšieho normálového napätia (Rankin, Clayperon)

Táto hypotéza predpokladá, že nebezpečný stav materiálu nastane vtedy, keď najväčšie normálové napätie danej napätosti dosiahne hodnotu normálového napätia priamkovej

napätosti, pri ktorom nastáva *lom (krehkých materiálov)*, resp. *veľké trvalé deformácie (húževnatých materiálov)*.

Teda aj všeobecne, keď všetky tri hlavné napätia σ_1 , σ_2 , σ_3 sú rôzne od nuly, treba pri kontrole podľa tejto hypotézy rátať len s veľkosťou najväčšieho normálového napätia v ťahu alebo v tlaku, a ostatné napätia ako keby nemali vplyv na pevnosť materiálu. Porovnávacie napätie bude v tomto prípade rovné maximálnemu hlavnému napätiu

$$\sigma_s = \sigma_1 = \sigma_{\max} \quad \text{pri tlaku } \sigma_s = \sigma_3$$

a podmienka pevnosti podľa tejto hypotézy potom bude

$$\sigma_s = \sigma_1 \leq \sigma_{\max}$$

Táto hypotéza dáva vyhovujúce výsledky len pre krehké materiály.

II. Hypotéza najväčšieho pomerného predĺženia (Saint-Venant)

Podľa tejto hypotézy dochádza k nebezpečnému stavu materiálu vtedy, keď pomerné predĺženie (resp. skrátenie) v ktoromkoľvek smere danej napätosti dosiahne hodnotu pomerného predĺženia priamkovej napätosti, pri ktorej nastáva porucha.

Nebezpečný stav nastáva teda pri pomernom predĺžení

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E}$$

Najväčšie pomerné predĺženie pri všeobecnej napätosti je dané rovnicou elasticity

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} \right)$$

Porovnaním posledných dvoch výrazov dostaneme:

$$\sigma_s = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}$$

Podmienka pevnosti podľa tejto hypotézy potom bude

$$\sigma_s = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} \leq \sigma_{\text{doz}}$$

Vyhovujúce výsledky dáva táto hypotéza tiež len pre krehké materiály.

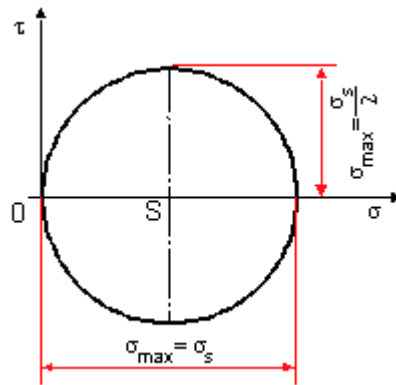
III. Hypotéza najväčšieho šmykového napätia (Guest-Coulomb)

Podľa tejto hypotézy nastáva pri všeobecnej napätosti nebezpečný stav (porušenia) materiálu vtedy, keď najväčšie šmykové napätie danej napätosti dosahuje hodnotu šmykového napätia priamkovej napätosti, pri ktorej nastáva porucha.

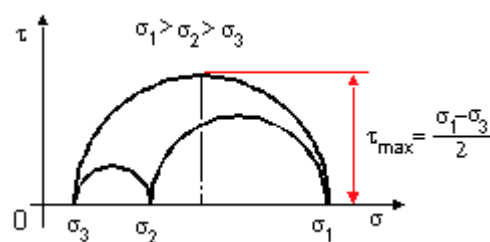
Keď pripustíme pri prostom ťahu (obr.8.1) - Mohrova kružnica jednoosovej napätosti - pre normálové napätie hodnotu $\sigma_{\max} = \sigma_s$, potom najväčšie šmykové napätie bude

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_s}{2}$$

ktoré pôsobí v rezoch sklonených pod uhlom 45° k smeru ťahového napätia σ_s .



Obr.8.1 Jednoosová napätosť



Obr.8.2 Priestorová napätosť

Maximálne šmykové napätie priestorovej napätosti (obr.8.2) podľa Mohrových kružníc priestorovej napätosti bude

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Porovnaním posledných dvoch výrazov dostaneme:

$$\sigma_s = \sigma_1 - \sigma_3 \quad \text{pre rovinnú napätosť} \quad \sigma_s = \sigma_1 - \sigma_2$$

Podmienku pevnosti pre priestorovú napätosť dostaneme v tvare

$$\sigma_s = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{\text{do v}}$$

a pre rovinnú napätosť

$$\sigma_s = \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_{\text{do v}}$$

Táto hypotéza súhlasí dosť presne so skutočnosťou, najmä pri húževnatých materiáloch a pri prevládajúcom namáhaní šmykovými napätiami (strih/šmyk, krútenie). Potvrdená je skúškami všestranného tlaku. Neplatí pre krehké materiály.

IV. Hypotéza celkovej energie napätosti (Beltrami-Haigh)

Podľa tejto hypotézy nastáva porušenie materiálu nezávisle od zloženej napätosti vtedy, keď celková energia napätosti danej napätosti dosiahne, resp. prekročí hodnotu celkovej energie napätosti priamkovej napätosti, pri ktorej nastáva porušenie materiálu.

Keď pri prostom ťahu pripustíme hodnotu normálového napätia $\sigma_s \leq \sigma_{\text{do v}}$, bude energia napätosti tejto priamkovej napätosti daná výrazom

$$A_1 = \frac{\sigma_s^2}{2E}$$

Celková energia napätosti pri priestorovej napätosti je

$$A_1 = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m} (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3) \right]$$

Porovnaním obidvoch energií napätosti dostaneme:

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m} (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3)}$$

Podmienka pevnosti pre priestorovú napätosť podľa tejto hypotézy je

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m} (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3)} \leq \sigma_{\text{dov}}$$

a pre rovinnú napätosť, kde $\sigma_3 = 0$, bude

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \frac{2}{m} \sigma_1 \cdot \sigma_2} \leq \sigma_{\text{dov}}$$

Táto hypotéza súhlasí so skutočnosťou pri húževnatých materiáloch pri napätosti, ktorá spôsobuje zväčšenie objemu.

V. Hypotéza energie napätosti pre zmenu tvaru (energie napätosti šmykových napätí - Huber-Misses-Hencky (H-M-H))

Podľa tejto hypotézy nastáva porušenie materiálov nezávisle od zloženej napätosti vtedy, keď energia napätosti pre zmenu tvaru danej napätosti prekročí hodnotu energie napätosti pre zmenu tvaru priamkovej napätosti, pri ktorej nastáva porucha.

Keď je priestorová napätosť daná napätiami $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, potom merná energia napätosti pre zmenu tvaru

$$A_i = \frac{m+1}{3mE} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3) \right]$$

Mernú energiu napätosti pre zmenu tvaru pri jednoosovej napätosti dostaneme tak keď do nej dosadíme $\sigma_1 = \sigma_s, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$. Potom bude

$$A_i = \frac{m+1}{3mE} \sigma_s^2$$

Porovnaním týchto vzťahov s úpravou, podobne ako v predchádzajúcej hypotéze, podmienka pevnosti potom bude

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3)} \leq \sigma_{\text{dov}}$$

a pre rovinnú napätosť danú napätiami $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = 0$ bude

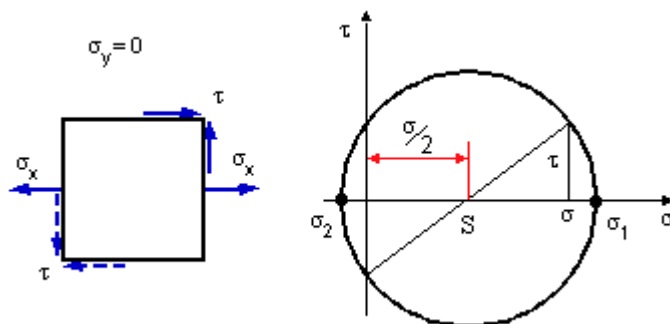
$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} \leq \sigma_{\text{dov}}$$

Skúšky ukázali, že táto hypotéza dáva najpresnejšie hodnoty pre húževnaté materiály okrem všestranného ťahu, keby podľa tejto hypotézy materiál zniesol nekonečne veľký všestranný ťah ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$, t.j.: $\sigma_s = 0$).

Poznámka: Všetky pevnostné hypotézy sú vyjadrené pomocou hlavných napätí a tak pre jednotlivé prípady namáhania bude vždy potrebné najprv určiť hlavné napätia pre danú napätosť a potom ich dosadiť do príslušnej hypotézy.

Príklad 1

Veľmi častý je prípad rovinatej napätosti danej napätiami σ a τ (obr.8.3). Určíme pre takýto prípad podmienky pevnosti podľa jednotlivých pevnostných hypotéz.



Obr.8.3 Rovinná napätosť

Hlavné napätia pomocou Mohrovej kružnice (obr.8.3b) budú definované vzťahmi:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

a potom podľa jednotlivých pevnostných hypotéz bude

I. Hypotéza najväčšieho normálového napätia

Dosadením za hlavné napätie σ_1 hore uvedený výraz, a po úprave dostaneme podmienku pevnosti v tvare

$$\sigma_s = 0,5\sigma + 0,5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{\text{doV}}$$

II. Hypotéza najväčšieho pomerného predĺženia

Dosadením za hlavné napätia σ_1, σ_2 hore uvedené vzťahy, podmienka pevnosti podľa tejto hypotézy po úprave bude

$$\sigma_s = 0,35\sigma + 0,65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{\text{doV}}$$

III. Hypotéza najväčšieho šmykového napätia

Dosadením za σ_1, σ_2 , po úprave dostaneme:

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{\text{doV}}$$

IV. Hypotéza celkovej energie napätosti

Dosadením za σ_1, σ_2 a za $m = 10/3$ dostaneme:

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma^2 + 2,6\tau^2} \leq \sigma_{\text{doV}}$$

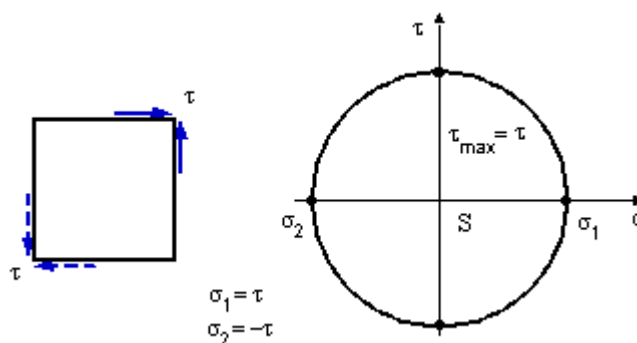
V. Hypotéza energie napätosti pre zmenu tvaru (H-M-H)

Dosadením za hlavné napätia do tejto hypotézy, podmienka pevnosti bude mať tvar:

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{\text{doV}}$$

Príklad 2

Keď je daná rovinná napätosť len samotnými šmykovými napätiami (obr.8.4a), potom, ako to vidieť aj z Mohrovej kružnice napätí (obr.8.4b), hlavné napätia budú:



Obr.8.4 Čistý šmyk

$$\sigma_1 = \tau$$

$$\sigma_2 = -\tau$$

a potom podľa jednotlivých hypotéz bude

I. Hypotéza najväčšieho normálového napätia

Keď dosadíme za $\sigma_1 = \tau$ a $\sigma_2 = -\tau$, dostaneme:

$$\sigma_s = \tau \leq \sigma_{\text{dov}}$$

a z toho

$$\tau_{\text{dov}} = \sigma_{\text{dov}}$$

II. Hypotéza najväčšieho pomerného predĺženia

Keď do tejto hypotézy dosadíme za $\sigma_1 = \tau$ a $\sigma_2 = -\tau$, po úprave bude

$$\sigma_s = 1,3\tau \leq \sigma_{\text{dov}}$$

a z toho

$$\tau_{\text{dov}} = 0,77\sigma_{\text{dov}}$$

III. Hypotéza najväčšieho šmykového napätia

Keď do tejto hypotézy dosadíme $\sigma_1 = \tau$ a $\sigma_2 = -\tau$, dostaneme:

$$\tau_{\text{dov}} = 0,5\sigma_{\text{dov}}$$

IV. Hypotéza celkovej energie napätosti

Keď do tejto hypotézy dosadíme $\sigma_1 = \tau$ a $\sigma_2 = -\tau$ a $m = 10/3$, po úprave dostaneme:

$$\sigma_s = 1,61\tau \leq \sigma_{\text{dov}}$$

a z toho

$$\tau_{\text{dov}} = 0,52\sigma_{\text{dov}}$$

V. Hypotéza energie napätosti pre zmenu tvaru (H-M-H)

Keď do tejto hypotézy dosadíme $\sigma_1 = \tau$ a $\sigma_2 = -\tau$, dostaneme:

$$\sigma_s = 1,73\tau \leq \sigma_{\text{dov}}$$

a z toho

$$\tau_{\text{dov}} = 0,577\sigma_{\text{dov}}$$

Ako vidieť, podľa jednotlivých pevnostných hypotéz dostávame rozdielne hodnoty dovoleného namáhania v šmyku v závislosti od dovoleného namáhania v ťahu. Vyhovujúce a najviac sa približujúce skutočnosti dávajú výsledky získané zo IV., resp. V. hypotézy, to znamená, že dovolené namáhanie v šmyku je asi 60% dovoleného namáhania v ťahu, t.j.

$$\tau_{dov} \doteq 0,6\sigma_{dov}$$

9. Momentové charakteristiky prierezu

Učebný cieľ kapitoly

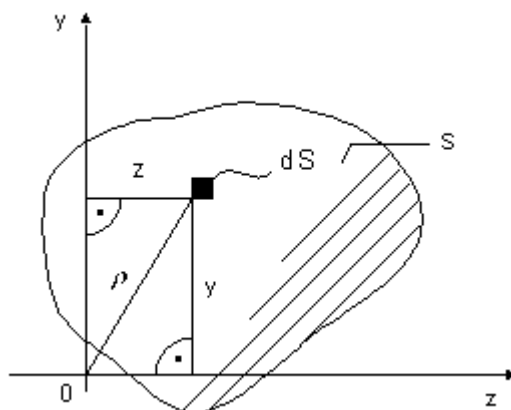
Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali ovládať:

- Charakteristiku kvadratických momentov prierezových plôch.
- Ako je definovaný kvadraticky moment plochy k osi a k pólu.
- Ako je definovaný deviačný moment plochy k súradnicovým osiam.
- Definíciu Steinerovej vety a jej použitie.
- Čo sú to hlavné (centrálne) momenty zotrvačnosti (kvadratické momenty) prierezovej plochy.
- Čo sú to centrálné osi zotrvačnosti prierezovej plochy.
- Ku ktorým osiam je deviačný moment plochy nulový.
- Ako sa určia kvadratické momenty plochy k natočeným osiam.
- Matematické vyjadrenie kvadratických momentov plôch pre základné typy prierezov (obdĺžnik, štvorec, kruh, medzikruh)
- Ako možno určiť polohu ťažiska plochy prierezu pomocou statických momentov.

Pri riešení základných prípadov namáhania - ohybu a krútenia - narazíme na určité typy plošných integrálov, ktoré nazveme momentovými charakteristikami prierezu. Preto sa nimi budeme teraz zaoberať podrobnejšie.

9.1 MOMENTY ZOTRVAČNOSTI (KVADRATICKÉ MOMENTY) A DEVIACNÝ MOMENT PRIEREZU

Uvažujeme všeobecný rovinný prierez, ktorého plocha je S (obr.9.1).



Obr.9.1 Kvadratické momenty plochy

Vybratá elementárna plôška dS je vzdialená o hodnotu ρ od počiatku vzťažného súradnicového systému.

Moment zotrvačnosti prierezu (kvadratický moment prierezovej plochy) S k osi z , resp. y je definovaný vzťahom

$$I_z = \int_S y^2 dS$$

$$I_y = \int_S z^2 dS$$

Polárny moment zotrvačnosti (kvadratický moment) plochy S k pólu O je definovaný vzťahom

$$I_p = \int_S \rho^2 dS$$

po dosadení za $\rho^2 = y^2 + z^2$ bude

$$I_p = \int_S (z^2 + y^2) dS = \int_S z^2 dS + \int_S y^2 dS = I_y + I_z$$

Keďže veličiny z^2 , y^2 a ρ^2 sú vždy kladné, sú aj všetky momenty zotrvačnosti (kvadratické momenty) kladné a majú základný rozmer $[m^4]$.

Deviačný moment plochy S je definovaný vzťahom

$$D_{zy} = \int_S zy dS$$

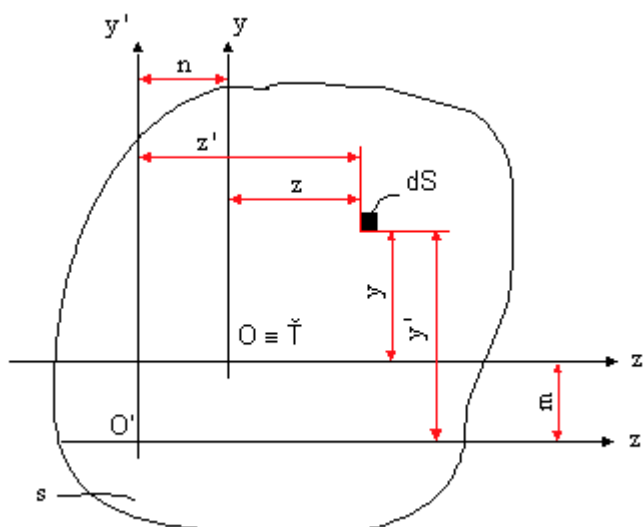
Z hore uvedenej rovnice vyplýva, že deviačný moment môže byť kladný, záporný alebo nulový. *Deviačný moment plochy S k osiam z a y je nulový, ak aspoň jedna z daných osí je osou symetrie prierezu.*

Z definície plošných integrálov vyplýva, že ak rozdelíme prierez na niekoľko častí, bude sa celkový moment zotrvačnosti alebo deviačný moment rovnať súčtu príslušných momentov týchto častí, prirodzene, k tým istým osiam. Teda

$$I_z = \sum_{i=1}^n I_{z_i}, \quad I_y = \sum_{i=1}^n I_{y_i}, \quad D_{zy} = \sum_{i=1}^n D_{zy_i}$$

9.2 STEINEROVA VETA

Pomocou Steinerovej vety určíme momentové charakteristiky prierezu k posunutým (rovnobežným) osiam prierezu (obr.9.2).



Obr.9.2 Steinerova veta

Moment zotrvačnosti napr. k osi z plochy S je definovaný vzťahom

$$I_z = \int_S y^2 dS = \int_S (y+m)^2 dS = \int_S y^2 dS + \int_S 2ym dS + \int_S m^2 dS = I_z + 0 + m^2 S = I_z + m^2 S$$

$$\int_S y dS = 0$$

Je zrejmé, že $\int_S y dS = 0$, preto vyjadruje statický moment plochy S k osi predchádzajúcej ťažiskom.

Podobne možno určiť moment zotrvačnosti k osi y

$$I_{y'} = I_y + n^2 S$$

Podobne moment k posunutým osiam je

$$D_{z'y'} = \int_S z' y' dS = \int_S (z+n)(y+m) dS = \int_S zy dS + n \int_S y dS + m \int_S z dS + mn \int_S dS,$$

kde

$$\int_S zy dS = D_{zy}$$

$$\int_S dS = S$$

$$\int_S z dS = \int_S y dS = 0$$

Potom

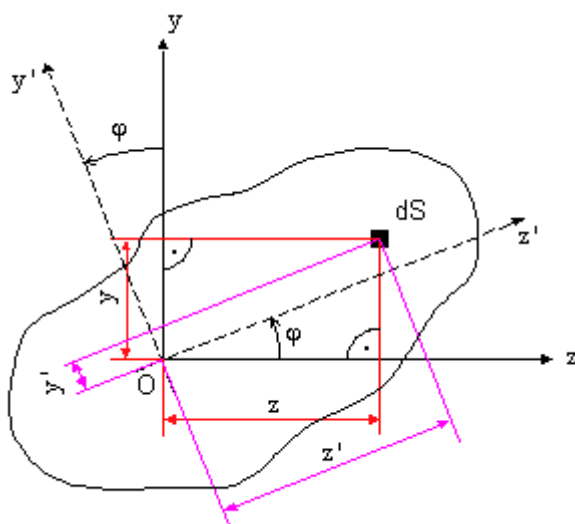
$$D_{z'y'} = D_{zy} + mnS$$

Hore uvedené rovnice sú matematickým vyjadrením *Steinerovej vety*, ktorá hovorí:

Momentové charakteristiky prierezu ($I_{z'}$, $I_{y'}$, $D_{z'y'}$) k posunutým osiam sú rovné súčtu momentovej charakteristiky (I_z , I_y , D_{zy}) k osiam, ktoré prechádzajú ťažiskom prierezu a prírastku, daným súčinom veľkosti plochy prierezu a štvorca posunutia osí (pri deviačnom momente je to súčin obidvoch posunutí osí).

9.3 MOMENTY ZOTRVAČNOSTI K NATOČENÝM OSIAM

Momenty zotrvačnosti a deviačný moment k natočeným súradniciam z a y sú (obr.9.3)



Obr.9.3 Kvadratický moment plochy k natočenej osi

$$I_x = \int_S y'^2 dS$$

$$I_y = \int_S z'^2 dS$$

$$D_{xy} = \int_S z' y' dS$$

Pri transformácii pôvodného súradnicového systému z, y natočením o uhol φ do novej polohy z', y' platí transformačný vzťah

$$\begin{bmatrix} z' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}$$

Použitím tohoto transformačného vzťahu momenty zotrvačnosti a deviačný moment bude

$$\begin{aligned} I_x &= \int_S (-z \sin \varphi + y \cos \varphi)^2 dS = \int_S z^2 \sin^2 \varphi dS - 2 \int_S zy \sin \varphi \cos \varphi dS + \int_S y^2 \cos^2 \varphi dS = \\ &= I_y \sin^2 \varphi + I_x \cos^2 \varphi - 2D_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

$$I_{y'} = \int_S (z \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 dS = \dots = I_y \cos^2 \varphi + I_x \sin^2 \varphi + 2D_{xy} \cos \varphi \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} D_{x'y'} &= \int_S (z \cos \varphi + y \sin \varphi)(y \cos \varphi - z \sin \varphi) dS = \\ &= \int_S zy \cos^2 \varphi dS + \int_S -z^2 \cos \varphi \sin \varphi dS + \int_S y^2 \sin \varphi \cos \varphi dS - \\ &- \int_S yz \sin^2 \varphi dS = D_{xy} \cos \varphi - I_y \cos \varphi \sin \varphi + I_x \sin \varphi \cos \varphi - \\ &- D_{xy} \sin^2 \varphi = (I_x - I_y) \cos \varphi \sin \varphi + D_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \end{aligned}$$

Uvedené rovnice možno ešte upraviť pomocou vzťahov:

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

$$2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$$

na tvar

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\varphi - D_{xy} \sin 2\varphi$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\varphi + D_{xy} \sin 2\varphi$$

$$D_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\varphi + D_{xy} \cos 2\varphi$$

Tieto rovnice sú podobné rovniciam pre σ a τ pri rovinnej napätosti. V týchto rovniciach si navzájom zodpovedajú veličiny:

$$\sigma_x \hat{=} I_x$$

$$\sigma_y \hat{=} I_y$$

$$I_x \hat{=} -D_{xy}$$

Hľadaním extrémnych hodnôt $I_{x'}$ a $I_{y'}$, dostaneme *hlavné momenty zotrvačnosti*

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x + I_y)^2 + 4D_{xy}^2}$$

Osi zodpovedajúce *hlavným momentom zotrvačnosti* nazývame *hlavnými osami zotrvačnosti* prierezu. Podobne ako pri rovinnej napätosti, môžeme momenty zotrvačnosti a deviačné momenty znázorniť Mohrovou kružnicou v súradniciach I a D_{xy} . Hlavné momenty zotrvačnosti k osiam, ktoré prechádzajú ťažiskom prierezu, nazývame *hlavnými centrálnymi momentmi* zotrvačnosti prierezu.

Polomer zotrvačnosti, napr. k osi z je definovaný vzťahom

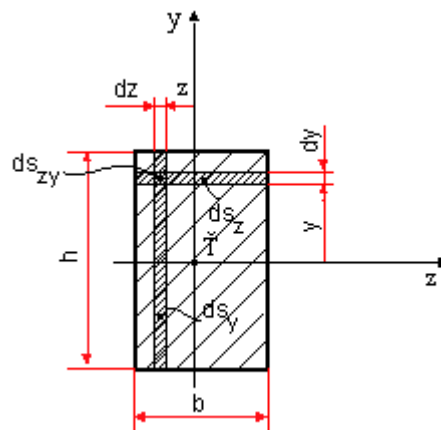
$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{S}}$$

kde I_z je moment zotrvačnosti plochy S k osi z . Rozmer polomeru zotrvačnosti je dĺžkový a značí takú vzdialenosť od osi z , že plocha S sústredená v tejto vzdialenosti má moment zotrvačnosti $I_z = i_z^2 S$.

Je teda zrejmé, že najväčšie a najmenšie hodnoty polomeru zotrvačnosti pre osi prechádzajúce jedným bodom budú prislúchať hlavným osiam zotrvačnosti.

Príklad 1

Pre obdĺžnikový prierez so stranami $b \times h$ určite hlavné centrálné momenty zotrvačnosti (obr.9.4).



Obr.9.4 Obdĺžnikový prierez

Riešenie

Hlavné centrálné momenty zotrvačnosti určíme podľa hore uvedených vzťahov. Pretože poloha ťažiska je jednoznačne daná, potrebujeme ešte určiť momenty zotrvačnosti a deviačný moment k dvom navzájom kolmým osiam prechádzajúcim ťažiskom prierezu I_z a I_y .

Podľa definície

$$\begin{aligned} I_z &= \int_S y^2 dS_z = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = \left[\frac{by^3}{3} \right]_{-h/2}^{+h/2} = \frac{bh^3}{12} \quad [m^4] \\ I_y &= \int_S z^2 dS_y = \int_{-b/2}^{+b/2} z^2 h dz = \left[\frac{hz^3}{3} \right]_{-b/2}^{+b/2} = \frac{hb^3}{12} \quad [m^4] \\ D_{zy} &= \int_S zy dS_{zy} = \int_S zy dz dy = 0 \end{aligned}$$

Potom centrálné hlavné momenty zotrvačnosti sú:

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{I_x - I_y}{2}$$

$$I_1 = I_x = \frac{bh^3}{12} [m^4]$$

$$I_2 = I_y = \frac{hb^3}{12} [m^4]$$

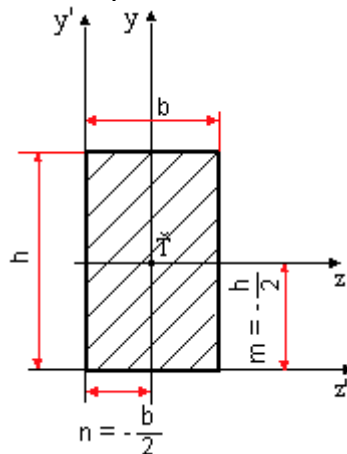
$$I_1 > I_2$$

Z výsledku je zrejmé, že osi z a y sú hlavnými centrálnymi osami zotrvačnosti prierezu. V prípade štvorcového prierezu $b = h = a$ bude

$$I_{1,2} = \frac{a^4}{12}$$

Príklad 2

Určite momenty zotrvačnosti obdĺžnikového prierezu k osiam z a y , ktoré sú vodorovne posunuté od centrálnych osí zotrvačnosti prierezu o hodnotu $m = -\frac{h}{2}$ a $n = -\frac{b}{2}$ (obr.9.5).



Obr.9.5 Posunuté osi

Riešenie

Momenty zotrvačnosti (kvadratické momenty plochy prierezu) možno určiť priamo z definície alebo pomocou Steinerovej vety. Použitím Steinerovej vedy dostaneme:

$$I_{x'} = I_x + m^2 S = \frac{bh^3}{12} + \left(-\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3}$$

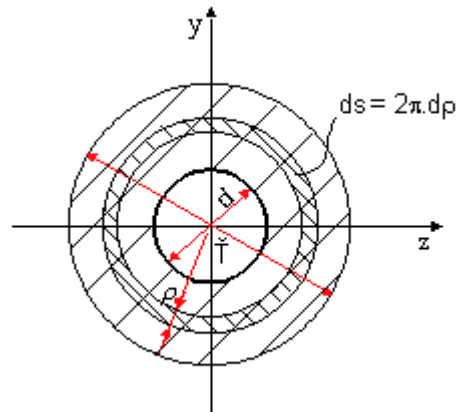
$$I_{y'} = I_y + n^2 S = \dots = \frac{hb^3}{3}$$

$$D_{x'y'} = D_{xy} + mnS = 0 + \left(-\frac{h}{2}\right)\left(-\frac{b}{2}\right)bh$$

$$D_{x'y'} = \frac{h^2 b^2}{4}$$

Príklad 3

Určite hlavné centrálné momenty zotrvačnosti medzikruhového prierezu podľa obr.9.6.



Obr.9.6 Medzikruhový prierez

Riešenie

Pre kruhový prierez platí:

$$I_p = I_x + I_y = 2I_x = 2I_y \Rightarrow I_x = I_y = \frac{I_p}{2}$$

Polárny moment zotrvačnosti medzikruhu bude rovný rozdielu polárneho momentu prierezu priemeru D a vybratej kruhovej časti prierezu d

$$I_p = I_p^D - I_p^d = \int_S \rho^2 dS = \int_{d/2}^{D/2} 2\pi \rho^3 d\rho = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]$$

Potom

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]$$

$$D_{xy} = 0$$

Je zrejmé, že I_x a I_y sú zároveň hlavnými centrálnymi momentmi zotrvačnosti prierezu. Každá os predchádzajúca ťažiskom medzikruhového prierezu je hlavnou centrálnou osou zotrvačnosti.

V prípade plného prierezu ($d = 0$) bude

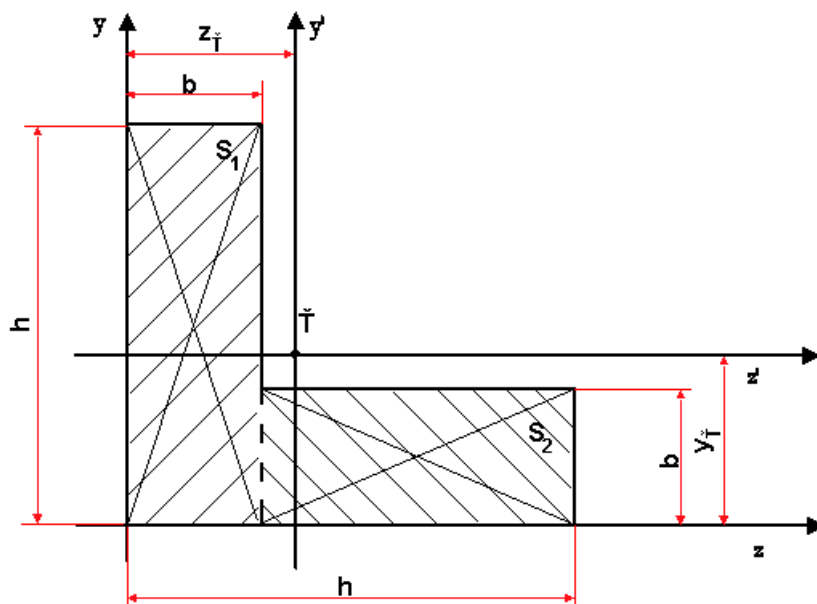
$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} = I_{1,2}$$

$$D_{xy} = 0$$

Príklad 4

Určite hlavné centrálné momenty zotrvačnosti rovnoramenného L - valcovaného profilu (obr.9.7).



Obr.9.7 Zložený profil

Riešenie

1. Určíme polohu ťažiska prierezu.
2. Určíme $I_{z'}$, $I_{y'}$ a $D_{zy'}$ k zvoleným navzájom kolmým osiam z a y , ktoré prechádzajú ťažiskom prierezu.
3. Určíme hlavné centrálné momenty zotrvačnosti I_1 , I_2 .
1. Polohu ťažiska prierezu určíme zo statických momentov plochy prierezu ku vhodne zvoleným osiam z a $y \rightarrow U_z$ a U_y :

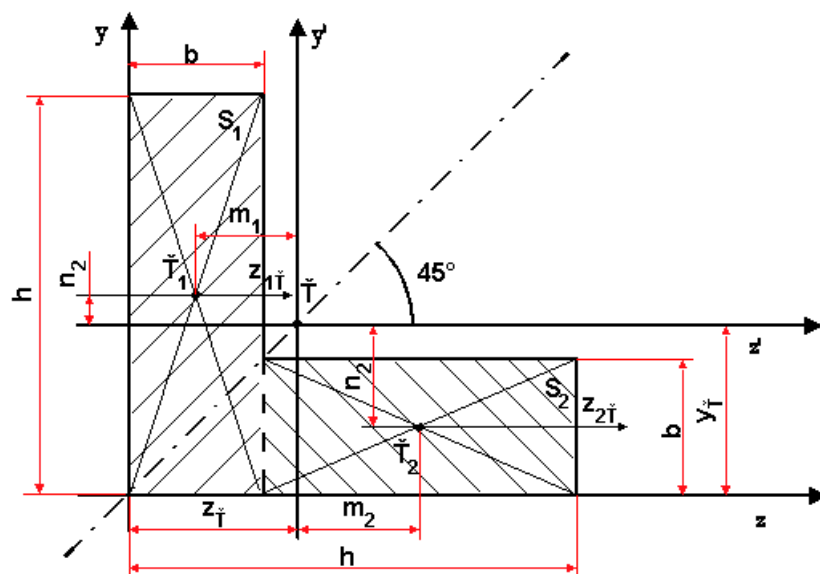
$$U_z = y_T S \Rightarrow y_T = \frac{U_z}{S} = \frac{U_{z1} + U_{z2}}{S_1 + S_2}$$

$$z_T = \frac{S_1 \frac{h}{2} + S_2 \frac{b}{2}}{S_1 + S_2}$$

2. pričom U_{z1} a U_{z2} sú statické momenty plôch $S_1 = hb$ a $S_2 = b(h-b)$. Vzhľadom na symetriu prierezu je zrejmé, že

$$y_T = z_T$$

Moment zotrvačnosti k osi z podľa Steinerovej vety bude (obr.9.8):



Obr.9.8 Kvadratické momenty L profilu

$$I_{x'} = I_{x1} + I_{x2}$$

$$I_{x1} = I_{x1T} + n_1^2 S_1 = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2} - y_T\right)^2 hb$$

$$I_{x2} = I_{x2T} + n_2^2 S_2 = \frac{(h-b)b^3}{12} + \left(y_T - \frac{b}{2}\right)^2 (h-b)b$$

Tým je $I_{z'}$ určený. Vzhľadom na symetriu prierezu platí:

$$I_{x'} = I_{y'}$$

Deviačný moment

$$D_{x'y'} = m_1 n_1 S_1 + m_2 n_2 S_2$$

$$m_1 = z_T - \frac{b}{2}$$

$$m_2 = \left(b + \frac{h-b}{2}\right) - z_T$$

pretože deviačné momenty plôch S_1 a S_2 k osiam prechádzajúcim ťažiskami časti prierezu sú rovné nule.

3. Hlavné centrálné momenty sú:

$$I_1 = \frac{I_{x'} + I_{y'}}{2} + D_{x'y'}$$

$$I_{12} = \frac{I_{x'} + I_{y'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x'} - I_{y'}}{2}\right)^2 + D_{x'y'}^2} = \langle$$

$$I_2 = \frac{I_{x'} + I_{y'}}{2} - D_{x'y'}$$

Možno dokázať, že I. centrálna os zotrvačnosti zvisia s osou z uhol 45° a II. Centrálna os je na ňu kolmá.

Poznámka: Podobným spôsobom určujeme momentové charakteristiky aj pre iné typy zložených plôch. Pre najčastejšie používané prierezy valcovaných profilov (C, I, L a iné) sú momenty zotrvačnosti prierezov stanovené v strojných tabuľkách.