9. Momentové charakterisitky prierezu

Učebný cieľ kapitoly

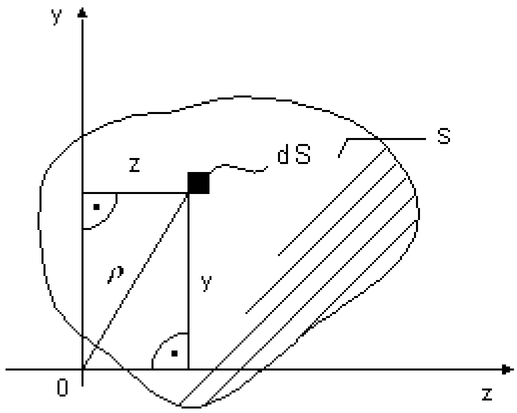
Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali ovládať:

- Charakteristiku kvadratických momentov prierezových plôch.
- Ako je definovaný kvadraticky moment plochy k osi a k pólu.
- Ako je definovaný deviačný moment plochy k súradnicovým osiam.
- Definíciu Steinerovej vety a jej použitie.
- Čo sú to hlavné (centrálne) momenty zotrvačnosti (kvadratické momenty) prierezovej plochy.
- Čo sú to centrálne osi zotrvačnosti prierezovej plochy.
- Ku ktorým osiam je deviačný moment plochy nulový.
- Ako sa určia kvadratické momenty plochy k natočeným osiam.
- Matematické vyjadrenie kvadratických momentov plôch pre základné typy prierezov (obdĺžnik, štvorec, kruh, medzikruh)
- Ako možno určiť polohu ťažiska plochy prierezu pomocou statických momentov.

Pri riešení základných prípadov namáhania - ohybu a krútenia - narazíme na určité typy plošných integrálov, ktoré nazveme momentovými charakteristikami prierezu. Preto sa nimi budeme teraz zaoberať podrobnejšie.

9.1 MOMENTY ZOTRVAČNOSTI (KVADRATICKÉ MOMENTY) A DEVIAČNÝ MOMENT PRIEREZU

Uvažujeme všeobecný rovinný prierez, ktorého plocha je S (obr.9.1).



Obr.9.1 Kvadratické momenty plochy

Vybratá elementárna plôška dS je vzdialená o hodnotu ρ od počiatku vzťažného súradnicového systému.

Moment zotrvačnosti prierezu (kvadratický moment prierezovej plochy) S k osi z, resp. y je definovaný vzťahom

$$I_z = \int_S y^2 dS$$

$$I_y = \int_S z^2 dS$$

Polárny moment zotrvačnosti (kvadratický moment) plochy S k pólu O je definovaný vzťahom

$$I_p = \int_S \rho^2 dS$$

po dosadení za $\rho^2 = y^2 + z^2$ bude

$$I_p = \int_S \left(z^2 + y^2\right) dS = \int_S z^2 dS + \int_S y^2 dS = I_y + I_z$$

Keďže veličiny z^2, y^2 a ρ^2 sú vždy kladné, sú aj všetky momenty zotrvačnosti (kvadratické momenty) kladné a majú základný rozmer [m^4].
Deviačný moment plochy S je definovaný vzťahom

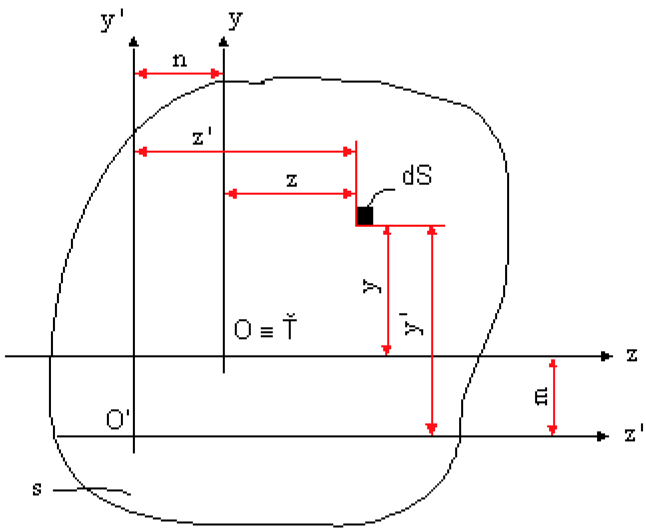
$$D_{zy} = \int_S zy dS$$

Z hore uvedenej rovnice vyplýva, že deviačný moment môže byť kladný, záporný alebo nulový. *Deviačný moment plochy S k osiam z a y je nulový, ak aspoň jedna z daných osí je osou symetrie prierezu*.
Z definície plošných integrálov vyplýva, že ak rozdelíme prierez na niekoľko častí, bude sa celkový moment zotrvačnosti alebo deviačný moment rovnať súčtu príslušných momentov týchto častí, prirodzene, k tým istým osiam. Teda

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} I_{z_i}, \quad I_y = \sum_{i=1}^{n} I_{y_i}, \quad D_{zy} = \sum_{i=1}^{n} D_{zy_i}$$

9.2 STEINEROVA VETA

Pomocou Steinerovej vety určíme momentové charakteristiky prierezu k posunutým (rovnobežným) osiam prierezu (obr.9.2).



Obr.9.2 Steinerova veta

Moment zotrvačnosti napr. k osi *z* plochy *S* je definovaný vzťahom

$$I_{z'} = \int_S y'^2 dS = \int_S (y+m)^2 dS = \int_S y^2 dS + \int_S zymdS + \int_S m^2 dS = I_z + 0 + m^2 S = I_z + m^2 S$$

Je zrejmé, že $\int_S ydS = 0$, preto vyjadruje statický moment plochy *S* k osi predchádzajúcej ťažiskom.
Podobne možno určiť moment zotrvačnosti k osi *y*

$$I_{y'} = I_y + n^2 S$$

Podobne moment k posunutým osiam je

$$D_{z'y'} = \int_S z'y'dS = \int_S (z+n)(y+m)dS = \int_S zydS + n\int_S ydS + m\int_S zdS + mn\int_S dS,$$

kde

$$\int_S zydS = D_{zy}$$

$$\int_S dS = S$$

$$\int_S zdS = \int_S ydS = 0$$

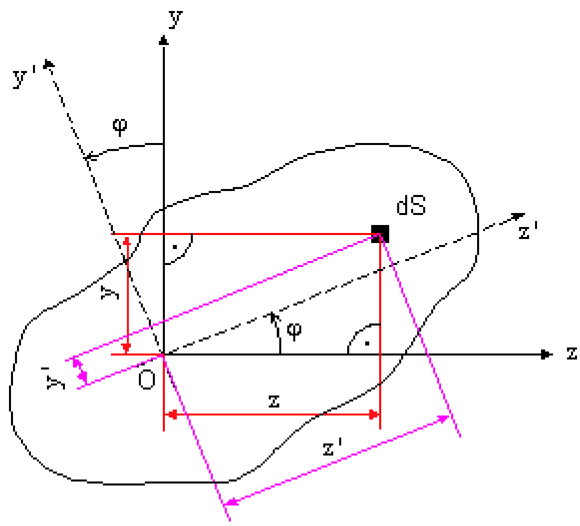
Potom

$$D_{z'y'} = D_{zy} + mnS$$

Hore uvedené rovnice sú matematickým vyjadrením *Steinerovej vety*, ktorá hovorí:
Momentové charakteristiky prierezu ($I_{z'}$, $I_{y'}$, $D_{z'y'}$) k posunutým osiam sú rovné súčtu momentovej charakteristiky (I_z, I_y, D_{zy}) k osiam, ktoré prechádzajú ťažiskom prierezu a prírastku, daným súčinom veľkosti plochy prierezu a štvorca posunutia osí (pri deviačnom momente je to súčin obidvoch posunutí osí).

9.3 MOMENTY ZOTRVAČNOSTI K NATOČENÝM OSIAM

Momenty zotrvačnosti a deviačný moment k natočeným súradniciam *z* a *y* sú (obr.9.3)



Obr.9.3 Kvadratický moment plochy k natočenej osi

$$I_{z'} = \int_S y'^2 \, dS$$
$$I_{y'} = \int_S z'^2 \, dS$$
$$D_{yz} = \int_S z' y' dS$$
Pri transformácii pôvodného súradnicového systému *z*, *y* natočením o uhol φ do novej polohy *z*', *y*' platí transformačný vzťah
$$\begin{bmatrix} z' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}$$
Použitím tohoto transformačného vzťahu momenty zotrvačnosti a deviačný moment bude
$$I_{z'} = \int_S (-z\sin\varphi + y\cos\varphi)^2 \, dS = \int_S z^2 \sin^2\varphi dS - 2\int_S zy \sin\varphi\cos\varphi dS + \int_S y^2 \cos\varphi dS =$$
$$= I_y \sin^2\varphi + I_z \cos^2\varphi - 2D_{zy} \sin\varphi\cos\varphi$$
$$I_{y'} = \int_S (z\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 \, dS = \ldots = I_y \cos^2\varphi + I_z \sin^2\varphi + 2D_{zy}\cos\varphi\sin\varphi$$
$$D_{z'y'} = \int_S (z\cos\varphi + y\sin\varphi)(y\cos\varphi - z\sin\varphi) dS =$$
$$= \int_S zy\cos^2\varphi dS + \int_S -z^2\cos\varphi\sin\varphi dS + \int_S y^2 \sin\varphi\cos\varphi dS -$$
$$- \int_S yz\sin^2\varphi dS = D_{zy}\cos\varphi - I_y\cos\varphi\sin\varphi + I_z \sin\varphi\cos\varphi -$$
$$- D_{zy}\sin^2\varphi = (I_z - I_y)\cos\varphi\sin\varphi + D_{zy}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$
Uvedené rovnice možno ešte upraviť pomocou vzťahov:
$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$$
$$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$$
$$2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$$
na tvar
$$I_{z'} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\varphi - D_{zy}\sin 2\varphi$$
$$I_{y'} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\varphi + D_{zy}\sin 2\varphi$$
$$D_{z'y'} = \frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\varphi + D_{zy}\cos 2\varphi$$
Tieto rovnice sú podobné rovniciam pre σ a τ pri rovinnej napätosti. V týchto rovniciach si navzájom zodpovedajú veličiny:
$$\sigma_x \triangleq I_z$$
$$\sigma_y \triangleq I_y$$
$$I_z \triangleq -D_{zy}$$
Hľadaním extrémnych hodnôt $I_{z'}$ a $I_{y'}$, dostaneme *hlavné momenty zotrvačnosti*

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_z + I_y)^2 + 4D_{zy}^2}$$

Osi zodpovedajúce *hlavným momentom zotrvačnosti* nazývame *hlavnými osami zotrvačnosti* prierezu. Podobne ako pri rovinnej napätosti, môžeme momenty zotrvačnosti a deviačné momenty znázorniť Mohrovou kružnicou v súradniciach I a D_{zy}. Hlavné momenty zotrvačnosti k osiam, ktoré prechádzajú ťažiskom prierezu, nazývame *hlavnými centrálnymi momentmi* zotrvačnosti prierezu.

Polomer zotrvačnosti, napr. k osi z je definovaný vzťahom

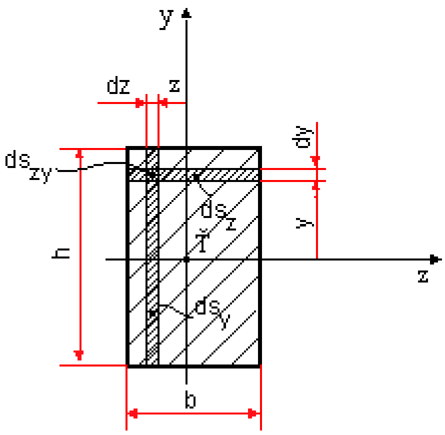
$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{S}}$$

kde I_z je moment zotrvačnosti plochy S k osi z. Rozmer polomeru zotrvačnosti je dĺžkový a značí takú vzdialenosť od osi z, že plocha S sústredená v tejto vzdialenosti má moment zotrvačnosti $I_z = i_z^2 S$.

Je teda zrejmé, že najväčšie a najmenšie hodnoty polomeru zotrvačnosti pre osi prechádzajúce jedným bodom budú prislúchať hlavným osiam zotrvačnosti.

Príklad 1

Pre obdĺžnikový prierez so stranami $b \times h$ určite hlavné centrálne momenty zotrvačnosti (obr.9.4).



Obr.9.4 Obdĺžnikový prierez

Riešenie

Hlavné centrálne momenty zotrvačnosti určíme podľa hore uvedených vzťahov. Pretože poloha ťažiska je jednoznačne daná, potrebujeme ešte určiť momenty zotrvačnosti a deviačný moment k dvom navzájom kolmým osiam prechádzajúcim ťažiskom prierezu I_z a I_y.

Podľa definície

$$I_z = \int_S y^2 dS_z = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = \left[\frac{by^3}{3}\right]_{-h/2}^{+h/2} = \frac{bh^3}{12} \qquad [m^4]$$

$$I_y = \int_S z^2 dS_y = \int_{-b/2}^{+b/2} z^2 h dz = \left[\frac{hz^3}{3}\right]_{-b/2}^{+b/2} = \frac{hb^3}{12} \qquad [m^4]$$

$$D_{zy} = \int_S zy dS_{yz} = \int_S zy dz dy = 0$$

Potom centrálne hlavné momenty zotrvačnosti sú:

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{I_z - I_y}{2}$$

$$I_1 = I_z = \frac{bh^3}{12}\left[m^4\right]$$

$$I_2 = I_y = \frac{hb^3}{12}\left[m^4\right]$$

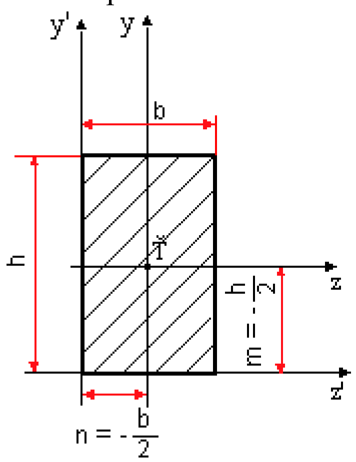
$$I_1 > I_2$$

Z výsledku je zrejmé, že osi *z* a *y* sú hlavnými centrálnymi osami zotrvačnosti prierezu.
V prípade štvorcového prierezu $b = h = a$ bude

$$I_{1,2} = \frac{a^4}{12}$$

Príklad 2

Určite momenty zotrvačnosti obdĺžnikového prierezu k osiam *z* a *y*, ktoré sú vodorovne posunuté od centrálnych osí zotrvačnosti prierezu o hodnotu $m = -\frac{h}{2}$ a $n = -\frac{b}{2}$ (obr.9.5).



Obr.9.5 Posunuté osi

Riešenie

Momenty zotrvačnosti (kvadratické momenty plochy prierezu) možno určiť priamo z definície alebo pomocou Steinerovej vety. Použitím Steinerovej vedy dostaneme:

$$I_{z'} = I_z + m^2 S = \frac{bh^3}{12} + \left(-\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3}$$

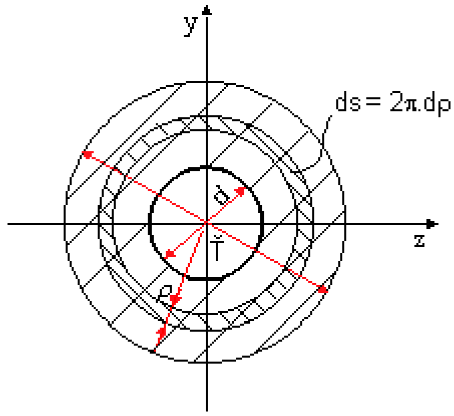
$$I_{y'} = I_y + n^2 S = \ldots = \frac{hb^3}{3}$$

$$D_{z'y'} = D_{zy} + mnS = 0 + \left(-\frac{h}{2}\right)\left(-\frac{b}{2}\right)bh$$

$$D_{z'y'} = \frac{h^2 b^2}{4}$$

Príklad 3

Určite hlavné centrálne momenty zotrvačnosti medzikruhového prierezu podľa obr.9.6.



Obr.9.6 Medzikruhový prierez

Riešenie

Pre kruhový prierez platí:

$$I_p = I_z + I_y = 2I_z = 2I_y \Rightarrow I_z = I_y = \frac{I_p}{2}$$

Polárny moment zotrvačnosti medzikruhu bude rovný rozdielu polárneho momentu prierezu priemeru D a vybratej kruhovej časti prierezu d

$$I_p = I_p^D - I_p^d = \int_S \rho^2 dS = \int_{d/2}^{D/2} 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]$$

Potom

$$I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]$$

$$D_{zy} = 0$$

Je zrejmé, že I_z a I_y sú zároveň hlavnými centrálnymi momentmi zotrvačnosti prierezu. Každá os predchádzajúca ťažiskom medzikruhového prierezu je hlavnou centrálnou osou zotrvačnosti.

V prípade plného prierezu (d = 0) bude

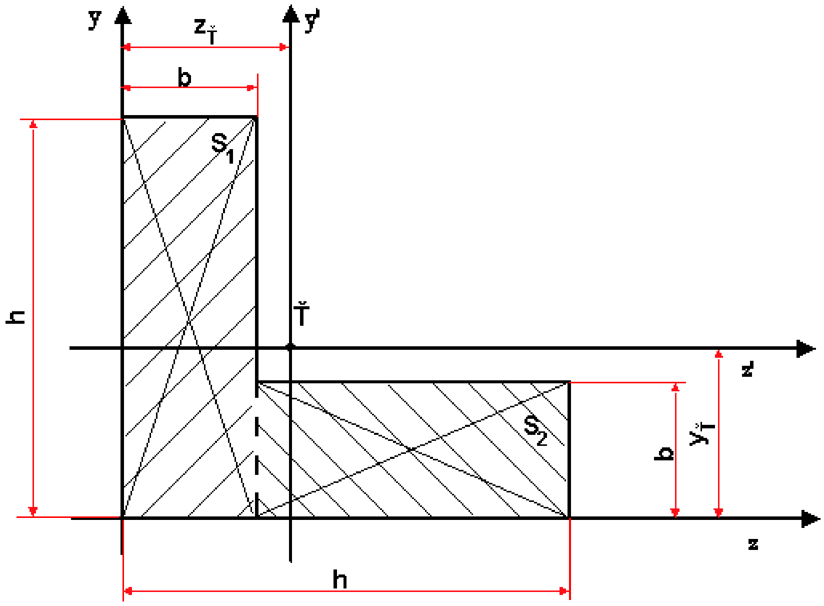
$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64} = I_{1,2}$$

$$D_{zy} = 0$$

Príklad 4

Určite hlavné centrálne momenty zotrvačnosti rovnoramenného L - valcovaného profilu (obr.9.7).



Obr.9.7 Zložený profil

Riešenie

1. Určíme polohu ťažiska prierezu.
2. Určíme $I_{z'}$, $I_{y'}$ a $D_{z'y'}$ k zvoleným navzájom kolmým osiam z a y, ktoré prechádzajú ťažiskom prierezu.
3. Určíme hlavné centrálne momenty zotrvačnosti I_1, I_2.

1. Polohu ťažiska prierezu určíme zo statických momentov plochy prierezu ku vhodne zvoleným osiam z a y $\rightarrow U_z$ a U_y:

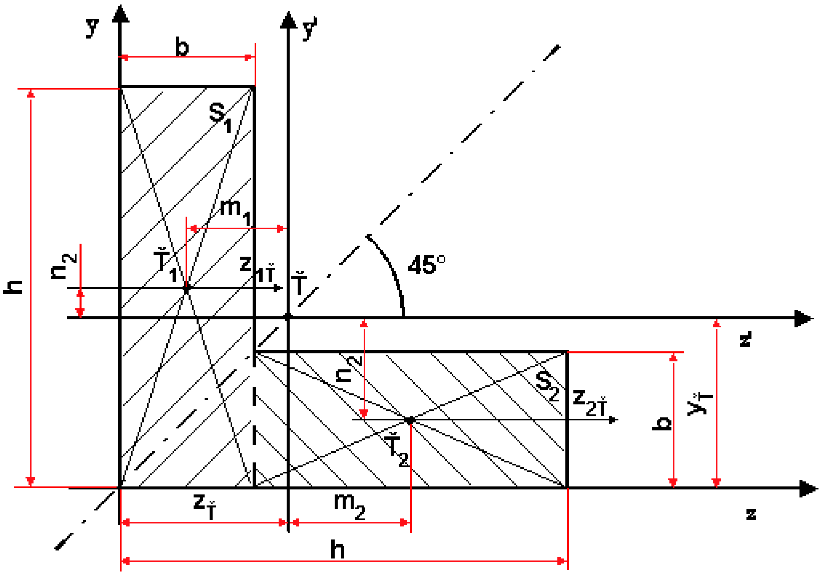
$$U_z = y_T S \Rightarrow y_T = \frac{U_z}{S} = \frac{U_{z1}+U_{z2}}{S_1+S_2}$$

$$z_T = \frac{S_1\frac{h}{2}+S_2\frac{b}{2}}{S_1+S_2}$$

2. pričom U_{z1} a U_{z2} sú statické momenty plôch $S_1 = hb$ a $S_2 = b(h\text{-}b)$. Vzhľadom na symetriu prierezu je zrejmé, že

$$y_T = z_T$$

Moment zotrvačnosti k osi z podľa Steinerovej vety bude (obr.9.8):



Obr.9.8 Kvadratické momenty L profilu

$$I_{z'} = I_{z1} + I_{z2}$$

$$I_{z'1} = I_{z1T} + n_1^2 S_1 = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2} - y_T\right)^2 hb$$

$$I_{z'2} = I_{z2T} + n_2^2 S_2 = \frac{(h-b)b^3}{12} + \left(y_T - \frac{b}{2}\right)^2 (h-b)b$$

Tým je $I_{z'}$ určený. Vzhľadom na symetriu prierezu platí:

$$I_{z'} = I_{y'}$$

Deviačný moment

$$D_{z'y'} = m_1 n_1 S_1 + m_2 n_2 S_2$$

$$m_1 = z_T - \frac{b}{2}$$

$$m_2 = \left(b + \frac{h-b}{2}\right) - z_T$$

pretože deviačné momenty plôch S_1 a S_2 k osiam prechádzajúcim ťažiskami časti prierezu sú rovné nule.

3. Hlavné centrálne momenty sú:

$$I_{1,2} = \frac{I_{z'} + I_{y'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{z'} - I_{y'}}{2}\right)^2 + D_{z'y'}^2} = \begin{cases} I_1 = \dfrac{I_{z'} + I_{y'}}{2} + D_{z'y'} \\ I_2 = \dfrac{I_{z'} + I_{y'}}{2} - D_{z'y'} \end{cases}$$

Možno dokázať, že I. centrálna os zotrvačnosti zviera s osou z uhol 45° a II. Centrálna os je na ňu kolmá.

Poznámka: Podobným spôsobom určujeme momentové charakteristiky aj pre iné typy zložených plôch. Pre najčastejšie používané prierezy valcovaných profilov (C, I, L a iné) sú momenty zotrvačnosti prierezov stanovené v strojníckych tabuľkách.