7. Zovšeobecnený Hookov zákon

Učebný cieľ kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali ovládať:

- Definíciu a matematické vyjadrenie Hookovho zákona jednoosovej a rovinnej napätosti.
- Obsah Hookovho zákona priestorovej napätosti.
- Ako možno určiť pomernú zmenu objemu.
- Vyjadrenie energie napätosti.
- Vyjadrenie závislosti medzi modulom pružnosti v ťahu (tlaku), šmyku a Poissonovou konštantou.

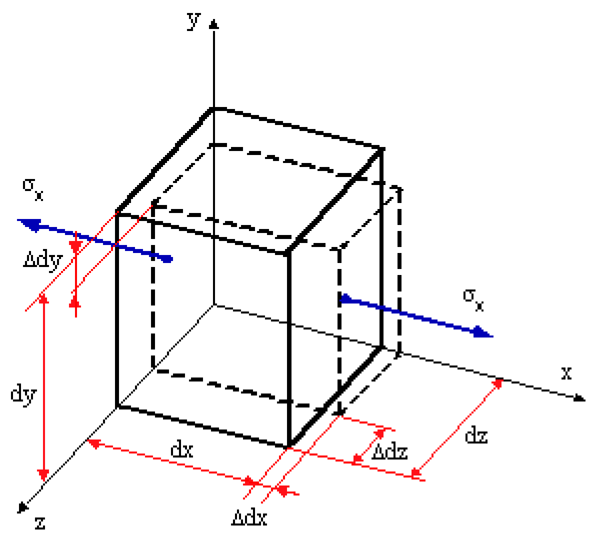
Vzájomnú závislosť medzi napätím σ a pomerným predĺžením ε tyče nám vyjadruje Hookov zákon v tvare

$$\sigma = E.\varepsilon$$

kde *E* sme nazvali modulom pružnosti materiálu v ťahu. Platnosť Hookovho zákona sa zovšeobecňuje aj pre rovinnú a priestorovú napätosť.

7.1 HOOKOV ZÁKON PRI JEDNOOSOVEJ NAPÄTOSTI

Treba určiť pretvorenie elementárneho hranola, na ktorý pôsobí len napätie σ_x (obr.7.1).



Obr.7.1 Pretvorenie hranola

Pre smer osi *x* možno napísať Hookov zákon:

$$\sigma_x = E.\varepsilon_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\Delta dx}{dx}$$

Okrem predĺženia ε_x sa hranol priečne zúži o rovnaké pomerné hodnoty (vyplýva to z pozorovania deformácie ťahanej tyče)

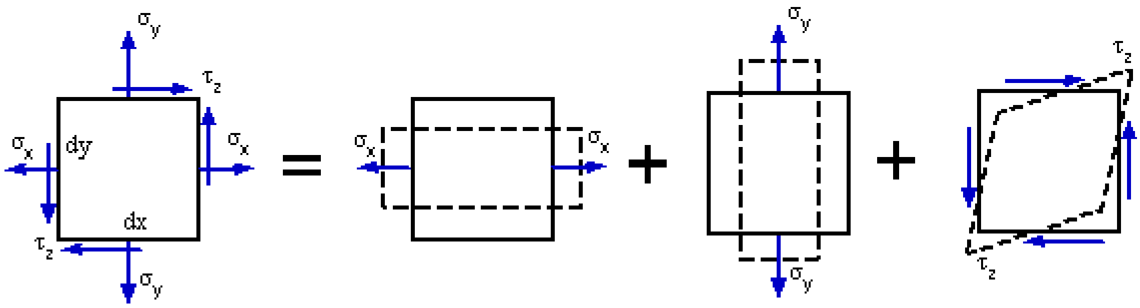
$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma_x}{m.E}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma_x}{m.E}$$

Z toho vyplýva, že aj priamková napätosť vyvoláva priestorové pretvorenie.

7.2 HOOKOV ZÁKON PRI ROVINNEJ NAPÄTOSTI

Rovinná napätosť je určená napätiami σ_x, σ_y, τ_z. Na základe zákona o superozícii účinkov budeme vyšetrovať pretvorenie hranola postupne od jednotlivých zložiek napätia (obr. 7.2).



Obr.7.2 Superpozícia účinkov

Vyjdeme z predpokladu, že normálové napätia spôsobia pomerné predĺženie hrán a šmykové napätie spôsobí zmenu pravých uhlov (pomerné skosenie) elementárneho hranola.

Pretvorenie od σ_x:

$$\varepsilon_x' = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y' = -\frac{\sigma_x}{m.E}$$

$$\varepsilon_z' = -\frac{\sigma_x}{m.E}$$

Pretvorenie od σ_y:

$$\varepsilon_x'' = -\frac{\sigma_y}{m.E}$$

$$\varepsilon_y'' = \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_x'' = -\frac{\sigma_y}{m.E}$$

Celkové pomerné predĺženie bude:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x' + \varepsilon_x'' = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m}\right)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y' + \varepsilon_y'' = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{m}\right)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z' + \varepsilon_z'' = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{m.E}$$

Pomerné skosenie od τ_z je dané Hookovým zákonom v šmyku

$$\gamma_z = \frac{\tau_z}{G}$$

Posledné dve rovnice nazývame rovnicami *elasticity*. Podobne ako pri jednoosovej napätosti, aj pri priamkovej napätosti je pretvorenie priestorové. V špeciálnom prípade, ak ε_z je veľmi malé, možno ho v praktických úlohách zanedbať, a vtedy hovoríme o *rovinnej deformácii*.
Z týchto rovníc možno stanoviť inverznú závislosť

$$\sigma_x = \frac{m^2.E}{m^2-1}\left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_y}{m}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{m^2.E}{m^2-1}\left(\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x}{m}\right)$$

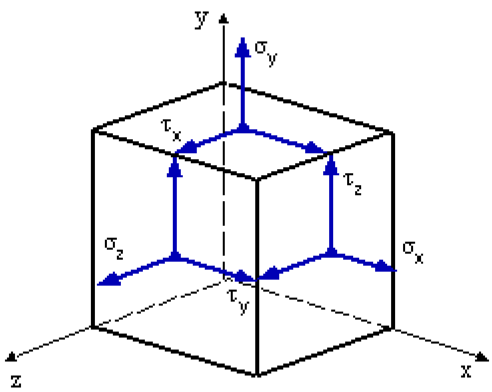
$$\tau_z = G.\gamma_z$$

ktorú nazývame zovšeobecneným Hookovým zákonom rovinnej napätosti. Ľahko možno ukázať, že v maticovom zápise bude mať tvar

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{m^2.E}{m^2-1} & \frac{m.E}{m^2-1} & 0\\ \frac{m.E}{m^2-1} & \frac{m^2.E}{m^2-1} & 0\\ 0 & 0 & G\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}$$

7.3 HOOKOV ZÁKON PRI PRIESTOROVEJ NAPÄTOSTI

Postupným určením pretvorenia hranola od napätí σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z (obr.7.3) a sčítaním jeho zložiek (podobne ako pri rovinnej napätosti) dostaneme:



Obr.7.3 Priestorová napätosť

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m}\right)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\right)$$
$$\gamma_x = \frac{\tau_x}{G}$$
$$\gamma_y = \frac{\tau_y}{G}$$
$$\gamma_z = \frac{\tau_z}{G}$$

Tieto rovnice predstavujú rovnice elasticky priestorovej napätosti. Inverzné vzťahy k nim značia zovšeobecnený Hookov zákon priestorovej napätosti:

$$\sigma_x = \frac{m.E}{m+1}\left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{m-2}\right)$$
$$\sigma_y = \frac{m.E}{m+1}\left(\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{m-2}\right)$$
$$\sigma_z = \frac{m.E}{m+1}\left(\varepsilon_z + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{m-2}\right)$$
$$\tau_x = G.\gamma_x$$
$$\tau_y = G.\gamma_y$$
$$\tau_z = G.\gamma_z$$

Úpravou týchto rovníc možno maticový tvar Hookovho zákona (obvykle sa používa Poissonova konštanta $\nu = \frac{1}{m}$)

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{1}{1-2\nu} & \frac{1}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{1}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1-2\nu} & \frac{1}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix}$$

7.4 POMERNÁ ZMENA OBJEMU

Uvažujeme elementárny hranol s dĺžkou strán *dx*, *dy* a *dz*. Pretvorenie elementárneho hranola je vo všeobecnosti dané pomernými predĺženiami ε_x, ε_y, ε_z a pomernými skoseniami γ_x, γ_y a γ_z. Pôvodný objem hranola bol

$$dV' = dxdydz$$

Ak zanedbáme vplyv zmeny pravých uhlov hranola na zmenu dĺžok jeho hrán, bude zmena objemu spôsobená predĺžením hrán hranola od pomerných predĺžení

$$dV' = (dx + \Delta dx)(dy + \Delta dy)(dz + \Delta dz) = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)dxdydz$$

Po roznásobení výrazov v zátvorkách a zanedbaním mocnín veličín malého rádu dostaneme:

$$dV' = dxdydz(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) = dV + dV(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$$

z toho zmena objemu

$$\Delta dV = dV' - dV = dV(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$$

a pomerná zmena objemu

$$\Theta = \frac{\Delta dV}{dV} = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

t.j. je rovná súčtu pomerných predĺžení strán hranola. Ak dosadíme do pomernej zmeny objemu rovnice elasticity, dostaneme:

$$\Theta = \frac{m-2}{m}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

Poznámka: V prípade všestranného ťahu alebo tlaku bude

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$$

čo znamená, že

$$\Theta = \frac{m-2}{m.E}.3p$$

Pre nestlačiteľné telesá je pomerná zmena objemu $\Theta = 0$. Potom musí platiť *m* - 2 = 0 a v tom prípade *m* = 2 ($\nu = 0{,}5$).

Z hľadiska fyzikálneho významu pre rovnice pomernej zmeny objemu musí platiť:

$$m-2 \geq 0 \Rightarrow m \geq 2$$
$$(\nu \leq 0{,}5)$$

V opačnom prípade, t. j. pre $m \geq 2$ $(\nu \leq 0{,}5)$, by bola, ako to vyplýva z hore uvedených rovníc, pri všestrannom ťahu pomerná zmena objemu Θ záporná, čo zrejme, odporuje skutočnosti.

7.5 ENERGIA NAPÄTOSTI PRI PRIESTOROVEJ NAPÄTOSTI

Celková energia napätosti bude daná súčtom energií napätosti od jednotlivých napätí σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z

$$A = A_{\sigma_x} + A_{\sigma_y} + \ldots + A_{\tau_z}$$

Využitím vzťahov zo 6.kapitoly potom platí:

$$A = \frac{1}{2}\int_V \sigma_x.\varepsilon_x dV + \ldots + \frac{1}{2}\int_V \tau_z.\gamma_z$$

Merná energia napätosti (ne jednotku objemu) bude

$$A_1 = \frac{dA}{dV} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x.\varepsilon_x + \sigma_y.\varepsilon_y + \ldots + \tau_z.\gamma_z\right)$$

Ak použijeme rovnice elasticity, dostaneme:

$$A_1 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{2}{m}\left(\sigma_x.\sigma_y + \sigma_y.\sigma_z + \sigma_x.\sigma_z\right) + \frac{\tau_z^2}{G}$$

Ak je rovinná napätosť zadaná hlavnými napätiami σ_1, σ_2 a σ_3 $(\tau = 0)$, posledná rovnica prejde do tvaru

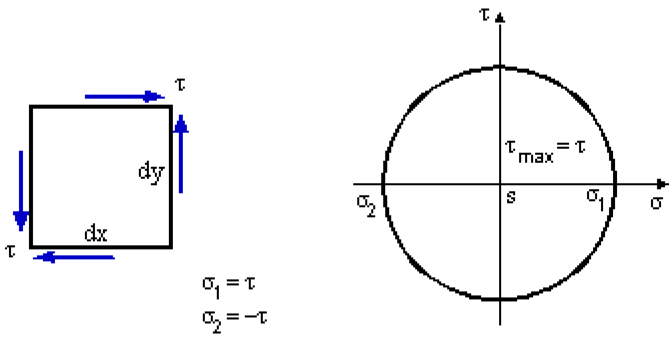
$$A_1 = \frac{1}{2A}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m}\left(\sigma_1.\sigma_2 + \sigma_2.\sigma_3 + \sigma_1.\sigma_3\right)\right]$$

V prípade rovinnej napätosti treba do posledných dvoch vzťahov dosadiť $\sigma_z = \tau_x = \tau_y = 0$, resp. $\sigma_3 = 0$.

V prípade jednoosovej napätosti je len σ_x rôzne od nuly, resp. σ_1 je rôzne od nuly.

7.6 VZÁJOMNÁ ZÁVISLOSŤ MEDZI *E*, *G* A *m*

Medzi modulom pružnosti v ťahu - tlaku *E*, modulom pružnosti v šmyku *G* a Poissonovou konštantou *m* existuje závislosť, ktorú môžeme ľahko odvodiť.
Uvažujme pritom elementárny hranol zaťažený samotnými šmykovými napätiami (obr. 7.4a) ako špeciálny prípad rovinnej napätosti.



Obr.7.4 Čistý šmyk

Merná energia napätosti prostého šmyku podľa rovnice je

$$A_{1\tau} = \frac{1}{2}\tau.\gamma = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}$$

Mernú energiu napätosti prostého šmyku možno však vyjadriť aj ako

$$A_{1\sigma} = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \frac{2}{m}\sigma_1.\sigma_2\right)$$

kde podľa Mohrovej kružnice napätí (obr.7.4) je $\sigma_1 = \tau,\quad \sigma_2 = -\tau$, a ak za tieto hodnoty dosadíme do poslednej rovnice, dostaneme:

$$A_1 = \frac{1}{2E}\left(\tau^2 + \tau^2 + \frac{2}{m}\tau^2\right) = \frac{m+1}{mE}.\tau^2$$

Rovnice pre $A_{1\tau}$ a A_1 v tomto prípade vyjadrujú mernú energiu napätosti toho istého prípadu, a teda musí byť

$$A_{1\tau} = A_1$$

t.j.

$$\frac{\tau^2}{2G} = \frac{m+1}{mE}\tau^2$$

a z toho modul pružnosti v šmyku bude

$$G = \frac{mE}{2(m+1)}$$